А. Марковъ

КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ФИЗИКА

АСТРОНОМИЯ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1948 Ленинград

А. А. МАРКОВ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
ПО
ТЕОРИИ
НЕПРЕРЫВНЫХ
ДРОБЕЙ
И
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ
ОТ НУЛЯ

*Биографический очерк
и примечания*
Н. И. АХИЕЗЕРА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва · 1948 · Ленинград

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В июле 1947 г. исполнилось двадцать пять лет со дня смерти выдающегося русского математика академика Андрея Андреевича Маркова, ближайшего ученика и последователя Пафнутия Львовича Чебышева.

Выпуском настоящего томика серии «Классиков естествознания», в который вошли избранные работы по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, издательство отмечает эту дату.

Научное творчество А. А. Маркова весьма разнообразно. Он занимался теорией чисел, дифференциальными уравнениями, непрерывными дробями, теорией вероятностей и многим другим.

Многие его работы воспринимаются и теперь как классические произведения математики и всё ещё продолжают питать идеями и методами новые поколения исследователей.

Однако не все эти работы легко найти современному читателю. Наибольшее распространение получила книга А. А. Маркова «Исчисление вероятностей»; в отдельном издании имеется его «Исчисление конечных разностей». Работы по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, остались либо разбросанными в журналах, либо в редких литографированных изданиях.

Желая сделать эти работы доступными современному читателю, издательство и подготовило настоящий томик. Материал для него отобран и отредактирован Н. И. Ахиезером. Им же написаны примечания.

Переводы статей А. А. Маркова, помещенных в настоящем издании под номерами 2, 3, 4, 7, 8 и 10, выполнены Л. И. Волковыским.

АНДРЕЙ АНДРЕЕВИЧ
МАРКОВ

Биографический очерк

АНДРЕЙ АНДРЕЕВИЧ МАРКОВ

Андрей Андреевич Марков родился 14 июня 1856 г. в Рязанской губернии. Отец его был женат два раза и имел, кроме дочерей, от первого брака сына Андрея, а от второго — Владимира, также выдающегося математика, скончавшегося в молодости от туберкулёза.

Среднее образование А. А. Марков получил в 5-й Петербургской гимназии, которую окончил в 1874 г. В том же году Марков поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета. Профессорами математического отделения были тогда П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарёв. Особенно сильное влияние на молодёжь имели Коркин и Золотарёв, которые, кроме обычных лекций, вели с лучшими студентами кружковые занятия у себя на дому. А. А. Марков сразу стал одним из наиболее активных и талантливых участников этих занятий.

В 1878 г. А. А. Марков окончил университет, получив золотую медаль за сочинение «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей».

Через два года А. А. Марков уже защитил магистерскую диссертацию «О бинарных квадратичных формах положительного определителя». В этом замечательном исследовании Марков явился последователем своих учителей Коркина и Золотарёва. Осенью того же года Марков был принят в университет в качестве приват-доцента и приступил к самостоятельному преподаванию.

Через четыре года (в 1884 г.) А. А. Марков защитил докторскую диссертацию «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей», важнейшей частью которой является доказательство и обобщение некоторых замечательных неравенств Чебышева, указанных им без доказательства в 1874 г. в небольшой статье «Sur les valeurs limites des intégrales».

Этой работой начинается целый цикл работ Маркова, посвящённых предельным величинам интегралов, интерполированию, функциям наименьшего уклонения от нуля и непрерывным дробям — работ, в которых Марков явился продолжателем своего гениального учителя П. Л. Чебышева.

Следует заметить, что к задаче о предельных величинах интегралов Чебышева привели некоторые идеи в теории вероятностей. Однако Чебышеву не удалось их реализовать. Осуществление этих идей Чебышева и создание метода моментов в теории вероятностей являются крупнейшей заслугой А. А. Маркова.

По предложению Чебышева уже в 1886 г. А. А. Маркова избирают адъюнктом Академии наук, а затем в 1890 г. экстраординарным и в 1896 г. ординарным академиком по кафедре математики.

В 1905 г. А. А. Марков получил звание заслуженного профессора университета и вышел в отставку, «не желая занятием штатной должности загораживать дорогу другим, более молодым силам». Однако, по праву академика, он читал почти до самой смерти различные курсы, главным образом теорию вероятностей и непрерывные дроби.

«Лекции А. А., — пишет в своём очерке *) Н. М. Гюнтер, — всегда имели деловой характер; никаких отступлений в сторону, не имеющих отношения к предмету, никаких вводных фраз, ничего показного».

Исключительный и своеобразный педагогический талант А. А. Маркова нашёл своё отражение также в его двух фундаментальных курсах: «Исчисление конечных разностей» и «Исчисление вероятностей». Представляя крупные научные произведения, эти труды отличаются тщательнейшей обработкой материала в интересах начинающих читателей. В них нет нестрогостей и нет вычислительных ошибок. Здесь проявляется характерная черта Маркова — одинаково тщательно относиться к самым тонким и самым элементарным вопросам.

Кроме этих курсов, Марков предполагал издать ещё один, а именно, «Непрерывные дроби». Судя по некрологическим очеркам В. А. Стеклова и Я. В. Успенского, такой курс А. А. Марков подготовил перед самой смертью. Однако разыскать рукопись нам не удалось. По этому предмету имеется лишь литографированный курс лекций А. А. Маркова, составленный Н. Михельсоном и относящийся к 1906 г. Этот курс с небольшими редакционными изменениями и некоторыми сокращениями входит в состав настоящего сборника, равно как и второй курс «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля», относящийся также к 1906 г.

---

*) Н. М. Гюнтер, О педагогической деятельности А. А. Маркова (Известия Российской Академии наук, 1923, стр. 35).

Крупнейший учёный, замечательный педагог, А. А. Марков был также прекрасным вычислителем и, подобно своему учителю Чебышеву, придавал большое значение умению вычислять. Образцом его вычислительной деятельности являются изданные им в 1888 г. «Таблицы значений интеграла $\int_x^\infty e^{-t^2}dt$».

За несколько месяцев до смерти А. А. Марков слёг. Врачами не было установлено определённо, какая болезнь свела его в могилу. Смерть наступила от процесса заражения крови, который обнаружился в последнюю неделю жизни. За $1\frac{1}{2}$ дня до смерти А. А. Марков впал в бессознательное состояние и умер 20 июля 1922 г.

ИЗБРАННЫЕ

ТРУДЫ

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

В небольшой заметке «Sur les valeurs limites des intégrales», помещённой в журнале Лиувилля за 1874 г., П. Л. Чебышев высказал, между прочим, следующую теорему:

Теорема. *Пусть $f(z)$ — какая-нибудь функция от z, а $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ — одна из дробей, подходящих к $\int\limits_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz$, притом $f(z)$ в пределах интегрирования, т. е. от $z=a$ до $z=b$, сохраняет постоянно знак $+$.*

Пусть далее

$$\psi(x)=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_l)\ldots(x-x_n),$$

где

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_k<\ldots<x_l<\ldots<x_n<b.$$

В таком случае должны иметь место следующие неравенства:

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz>\frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)}+\frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\varphi(x_{l-1})}{\psi'(x_{l-1})}+\frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)}>\int\limits_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz.$$

Прошло почти десять лет и, однако, доказательства этих неравенств мы нигде не встречаем.

Только отчасти путь к доказательству намечен самим П. Л. Чебышевым.

После нескольких бесплодных попыток мне удалось, наконец, найти весьма простое доказательство вышеуказанных неравенств вместе с нижеследующими:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \dots$$

$$\dots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})} < \int_a^{x_k} f(z)\,dz$$

и

$$\int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \dots$$

$$\dots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)} < \int_{x_l}^{b} f(z)\,dz.$$

Это доказательство составляет предмет настоящей заметки.

Основные формулы. Прежде всего вспомним, что

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{\psi(x)-\psi(z)}{x-z} f(z)\,dz, \qquad \varphi(x_i) = \int_a^b \frac{\psi(z)}{z-x_i} f(z)\,dz$$

и

$$\frac{\varphi(x_i)}{\psi'(x_i)} = \int_a^b \frac{\psi(z)}{(z-x_i)\,\psi'(x_i)} f(z)\,dz.$$

Далее, если $\Phi(z)$ — целая функция от z не выше $2n-1$-й степени, то

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\psi(z)\cdot\theta(z),$$

где

$$\Phi_0(z)=\Phi(x_1)\frac{\psi(z)}{(z-x_1)\psi'(x_1)}+$$
$$+\Phi(x_2)\frac{\psi(z)}{(z-x_2)\psi'(x_2)}+\ldots+\Phi(x_n)\frac{\psi(z)}{(z-x_n)\psi'(x_n)},$$

а $\theta(z)$ означает некоторую целую функцию от z $n-1$-й или низшей степени.

Вместе с тем

$$\int_a^b\Phi(z)f(z)\,dz=$$
$$=\Phi(x_1)\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+\Phi(x_2)\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\Phi(x_n)\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

В частности,

$$\int_a^b f(z)\,dz=\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})}+\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Приведение всех неравенств к двум. Нетрудно видеть, что все указанные нами неравенства могут быть выведены из двух:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz<\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})},$$

$$\int_{x_{l+1}}^b f(z)\,dz<\frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})}+\frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})}+\ldots+\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Действительно, заменяя здесь $k-1$ на l, а $l+1$ на k, получим:

$$\int_a^{x_l} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_k}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Отсюда затем, принимая во внимание равенство

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})} + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

выводим последовательно:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz - \int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz >$$

$$> \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_l}^{b} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_l} f(z)\,dz >$$

$$> \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

$$\int_a^{x_k} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_{x_k}^{b} f(z)\,dz >$$

$$> \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}$$

и, наконец,

$$\int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz = \int_a^{x_l} f(z)\,dz - \int_a^{x_k} f(z)\,dz <$$

$$< \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)}.$$

Простейшие частные случаи. Из равенства

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

непосредственно следуют неравенства

$$\int_a^{x_n} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

$$\int_{x_1}^b f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Эти простейшие частные случаи из всех дальнейших наших рассуждений мы исключим.

Доказательство неравенства

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Пусть

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z-x_1)\psi'(x_1)} + \frac{\psi(z)}{(z-x_2)\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\psi(z)}{(z-x_{k-1})\psi'(x_{k-1})}$$

и

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z)\cdot\theta(z),$$

где $\theta(z)$ — некоторая целая функция $n-2$-й степени от z.

Тогда по замеченному

$$\int_a^b \Phi(z)\cdot f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Подберём теперь $\theta(z)$ так, чтобы производная

$$\Phi'(z) = \Phi_0'(z) + \psi'(z)\cdot\theta(z) + \psi(z)\cdot\theta'(z)$$

обращалась в нуль при

$$z = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-2},\ x_k,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n.$$

Требование наше сводится к $n-1$ уравнениям следующего вида:

$$\theta(x_i) = -\frac{\Phi_0'(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

где i надо полагать последовательно равным

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k-2,\ k,\ k+1,\ \ldots,\ n.$$

Нетрудно видеть, что последние уравнения вполне определяют целую функцию $\theta(z)$ $n-2$-й степени. А именно,

$$\theta(z) = -\sum \frac{\Phi_0'(x_i)\cdot\psi(z)\cdot(x_i - x_{k-1})}{\{\psi'(x_i)\}^2(z-x_i)(z-x_{k-1})}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Подобрав таким образом $\theta(z)$, мы можем сказать, что $\Phi'(z)$ обращается в нуль $(n-1)$ раз, а именно, при

$$z = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-2},\ x_k,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n$$

и ещё $n-2$ раза, а именно, при некоторых значениях z в промежутках

от x_1 до x_2, от x_2 до x_3, $\ldots$, от x_{k-2} до x_{k-1},
от x_k до x_{k+1}, от x_{k+2} до x_{k+3}, $\ldots$, от x_{n-1} до x_n,

в каждом промежутке по разу, так как

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = \ldots = \Phi(x_{k-2}) = \Phi(x_{k-1}) = 1$$

и

$$\Phi(x_k) = \Phi(x_{k+1}) = \Phi(x_{k+2}) = \ldots$$
$$\ldots = \Phi(x_{n-1}) = \Phi(x_n) = 0.$$

Степень целой функции $\Phi'(z)$ равна $2n-3$.

Следовательно, все нули её нами пересчитаны. Ни один из них не лежит в промежутке от x_{k-1} до x_k и не совпадает с x_{k-1}.

Кроме того,

$$1 = \Phi(x_{k-1}) > \Phi(x_k) = 0.$$

Поэтому

$$\Phi'(x_{k-1}) < 0,$$

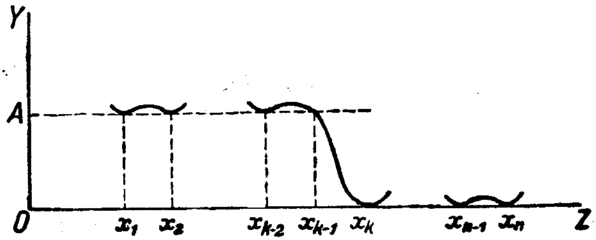
$$\Phi'(x_k - \varepsilon) < 0, \quad \Phi'(x_{k+1} - \varepsilon) < 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ \Phi'(x_{n-1} - \varepsilon) < 0, \quad \Phi'(x_n - \varepsilon) < 0,$$

$$\Phi'(x_k + \varepsilon) > 0, \quad \Phi'(x_{k+1} + \varepsilon) > 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ \Phi'(x_{n-1} + \varepsilon) > 0, \quad \Phi'(x_n + h) > 0,$$

$$\Phi'(x_{k-2} + \varepsilon) > 0, \quad \Phi'(x_{k-3} + \varepsilon) > 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ \Phi'(x_2 + \varepsilon) > 0, \quad \Phi'(x_1 + \varepsilon) > 0,$$

$$\Phi'(x_{k-2} - \varepsilon) < 0, \quad \Phi'(x_{k-3} - \varepsilon) < 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ \Phi'(x_2 - \varepsilon) < 0, \quad \Phi'(x_1 - h) < 0.$$

Здесь ε и h означают положительные количества первое бесконечно малое, второе произвольное.



Фиг. 1.

Отсюда нетрудно заключить, что $\Phi(z)$ при всех значениях z не меньше нуля и сверх того при $z \leqslant x_{k-1}$ не меньше единицы.

Полагая

$$y = \Phi(z),$$

будем иметь в кривой, представленной на фиг. 1, схематическое изображение хода этой функции.

Возвращаясь теперь к интегралу

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\, dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})};$$

мы можем написать следующие неравенства:

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} \Phi(z) f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz.$$

Итак,

$$\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})} > \int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz,$$

ч. и т. д.

Доказательство неравенства

$$\int_{x_{l+1}}^b f(z)\, dz < \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Пусть

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z - x_{l+1}) \cdot \psi'(x_{l+1})} + \frac{\psi(z)}{(z - x_{l+2}) \cdot \psi'(x_{l+2})} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\psi(z)}{(z - x_n) \cdot \psi(x_n)}$$

и

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z) \cdot \theta(z),$$

где $\theta(z)$ — целая функция $n-2$-й степени от z.

Для определения $\theta(z)$ постановим $n-1$ уравнений следующего вида:

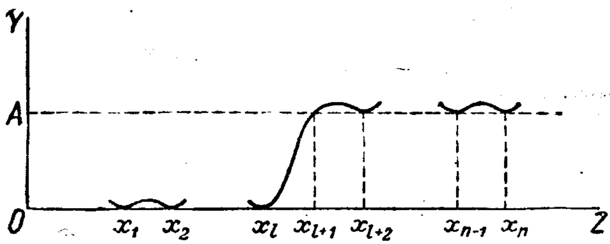
$$\theta(x_i) = -\frac{\Phi_0'(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, l, l+2, l+3, \ldots, n$, так что

$$\theta(z) = -\sum \frac{(x_i - x_{l+1}) \cdot \Phi_0'(x_i) \cdot \psi(z)}{\{\psi'(x_i)\}^2 (z - x_i)(z - x_{l+1})}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

В таком случае нетрудно убедиться, что $\Phi(z)$ при всех значениях z не меньше нуля и сверх того при $z \geqslant x_{l+1}$ не меньше единицы.



Фиг. 2.

Полагая $y = \Phi(z)$, ход рассматриваемой нами функции можно изобразить кривой, представленной на фиг. 2. Подобрав таким образом функцию $\Phi(z)$, получим:

$$\frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)} =$$

$$= \int_a^b \Phi(z) f(z)\, dz > \int_{x_{l+1}}^b f(z)\, dz,$$

ч. и т. д.

Для доказательства обоих неравенств нам пришлось повторить одни и те же рассуждения два раза.

Таким образом неравенства Чебышева доказаны вполне.

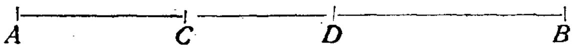
В заключение моей заметки считаю приятным долгом выразить живейшую благодарность К. А. Поссе, который обратил моё внимание на разобранный выше вопрос и показал решение его для некоторых случаев.

30 (18) декабря
1883 г.

2. ВЫДЕРЖКА ИЗ ОДНОГО ПИСЬМА ЭРМИТУ

Позвольте мне сообщить Вам результаты моих исследований по одному роду вопросов на максимум и минимум, вызванных мемуаром Чебышева «О предельных величинах интегралов», помещённым в Journal de mathématiques pures et appliquées в 1874 г. Вопрос, предложенный знаменитым геометром в упомянутом мемуаре, может быть сформулирован так:

Данная масса α_0 *распределена неизвестным образом на прямом отрезке AB длины* l.



Условимся определять положение каждой точки Y на AB через её расстояние от точки A

$$AY = y$$

и обозначим через m *массу в точке* Y *или через* $f(y)$ *плотность в точке* Y, *так что*

$$\alpha_0 = \sum m \quad \text{или} \quad \int_0^l f(y)\, dy.$$

Требуется найти такое распределение массы α_0, *чтобы суммы*

$$\sum m, \ \sum my, \ \sum my^2, \ \ldots, \ \sum my^n$$

или, что то же самое, интегралы

$$\int_0^l f(y)\,dy,\quad \int_0^l f(y)\,y\,dy,\quad \int_0^l f(y)\,y^2\,dy,\ \ldots,\ \int_0^l f(y)\,y^n\,dy$$

имели наперёд заданные значения, равные соответственно

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

и в то же время масса на данном сегменте CD ($AC = u$, $AD = v$), *т. е. интеграл*

$$\int_u^v f(y)\,dy,$$

была максимальной или минимальной.

Чебышев дал, но без всяких объяснений, решение этого вопроса для случая, когда n есть нечётное число $2k-1$ и числа u и v являются какими-либо корнями знаменателя k-й подходящей дроби $\frac{\psi_k(z)}{\varphi_k(z)}$ к разложению интеграла

$$\int_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y}$$

в непрерывную дробь.

Он также указал максимум и минимум интеграла

$$\int_0^v f(y)\,dy$$

в случае трёх заданных величин

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2.$$

Остановив своё внимание на этом роде вопросов, я сперва поставил себе целью доказать неравенства Чебышева, которые дают решение поставленного вопроса в первом вышеупомянутом случае, и это мне удалось в 1883 г.

Моё доказательство, основанное на рассмотрении парабол высшего порядка, касательных к заданным кривым в заданном числе точек, помещено на французском языке в Mathematische Annalen, 1884 г.

Затем я узнал, что те же соображения могут быть применены к решению общего вопроса, если точка C совпадает с $A(u=0)$, т. е. к определению максимума и минимума интеграла

$$\int_0^v f(y)\,dy$$

и, ещё обобщая вопрос, также к определению максимума и минимума интеграла

$$\int_0^v \Omega(y) f(y)\,dy,$$

где $\Omega(y)$ — какая-либо заданная функция, подчинённая некоторым ограничениям.

Результаты, к которым я таким образом пришёл, содержатся в следующих теоремах:

Теорема 1. *Если n равно нечётному числу $2k-1$ и выполнены условия проблемы, то вся масса отрезка AB может быть сконцентрирована в $k+1$ точках, одна из них точка D, $k-1$ других определяются из данных проблемы и одна точка — это A или B, в зависимости от того, имеют ли одинаковые или разные знаки числа*

$$\varphi_k(v) \quad \text{и} \quad W_{k-1}(v),$$

где $W_{k-1}(z)$ означает знаменателя $(k-1)$-й подходящей дроби для интеграла

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y\,(l-y)}{z-y}\,dy.$$

Расстояния

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1}$$

от точки A до $k-1$ точек, о которых говорится в теореме, являются корнями уравнения

$$\frac{\varphi(z)}{(z-v)(z-v')}=0,$$

где v' равно нулю в первом случае и равно l во втором, а $\varphi(z)$ — полином степени $k+1$, определённый условиями

$$\varphi(v)=0, \quad \varphi(v')=0,$$

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)y^i\,dy=0 \quad \text{для} \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2.$$

Соответствующая масса в точке x_i даётся формулой

$$m_i=\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

где

$$\psi(z)=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}\,dy.$$

Это распределение массы сообщает максимум массе, расположенной на сегменте AD, если точку D отнести к сегменту AD, и сообщает ей минимум, если точку D отнести к сегменту DB.

То же распределение сообщает максимум и минимум интегралу

$$\int_0^v \Omega(y)f(y)\,dy,$$

где $\Omega(y)$ — какая-либо функция, производные которой

$$\Omega'(y),\ \Omega''(y),\ \ldots,\ \Omega^{(n+1)}(y),$$

так же как и сама функция $\Omega(y)$, не становятся отрицательными между пределами 0 и l.

Теорема II. *Если, как выше, n равно $2k-1$, то для всякой функции $\Omega(y)$, $(n+1)$-я производная кот -*

рой нигде не отрицательна между пределами 0 *и* l, *минимум интеграла*

$$\int_0^l \Omega(y) f(y)\, dy$$

соответствует распределению всей массы в k *точках, расстояния которых от* A *являются корнями уравнения*

$$\varphi_k(z) = 0$$

и максимум соответствует распределению всей массы в точках A, B *и* $(k-1)$ *других точках, расстояния которых от* A *являются корнями уравнения*

$$W_{k-1}(z) = 0.$$

Теорема III. *Если* n *равно чётному числу* $2k$ *и выполнены условия проблемы, то вся масса может быть сконцентрирована в точке* D *и в* k *других точках, или в точках* D, A, B *и* $k-1$ *других точках, смотря по тому, имеют ли одинаковые или разные знаки знаменатели*

$$U_k(v, 0) \quad \text{и} \quad U_k(v, l)$$

k*-х подходящих дробей для интегралов*

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y}{v-y}\, dy \quad \text{и} \quad \int_0^l \frac{(l-y) f(y)}{v-y}\, dy.$$

В первом случае расстояния от k точек, о которых говорится в теореме, до точки A определяются как корни уравнения

$$\frac{\varphi(z)}{z-v} = 0,$$

где $\varphi(z)$ — полином степени $k+1$, определённый условиями

$$\varphi(v) = 0,$$

$$\int_0^l f(y)\varphi(y) y^i\, dy = 0 \quad \text{для} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Во втором случае расстояния от $k-1$ точек, о которых говорится в теореме, до точки A являются корнями уравнения

$$\frac{\varphi(z)}{z(z-l)(z-v)}=0,$$

где $\varphi(z)$ — полином степени $k+2$, обращающийся в нуль для $z=0$, $z=l$, $z=v$ и удовлетворяющий условиям

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)y^i\,dy=0 \quad \text{для} \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2.$$

То же распределение массы даёт максимум и минимум интегралу

$$\int_0^v \Omega(y)f(y)\,dy,$$

где $\Omega(y)$ — какая-либо функция, которая, так же как и её производные

$$\Omega'(y),\ \Omega''(y),\ \ldots,\ \Omega^{(n+1)}(y),$$

не становится отрицательной между пределами 0 и l.

Теорема IV. *Если n равно чётному числу $2k$, то для всякой функции $\Omega(y)$, $(n+1)$-я производная которой не становится отрицательной между пределами 0 и l, минимум интеграла*

$$\int_0^l \Omega(y)f(y)\,dy$$

соответствует распределению всей массы в точке A и k других точках, расстояния которых от точки A являются корнями уравнения

$$U_k(x,\ 0)=0,$$

и максимум соответствует распределению всей массы в точке B и k других точках, расстояния которых от точки A являются корнями уравнения

$$U_k(x,\ l)=0.$$

Все эти теоремы, содержащие полное решение вышепоставленных вопросов, были мной доказаны в моей диссертации «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей», опубликованной в 1884 г.

В связи с теоремой II я должен заметить, что она мне послужила для вывода выражения для дополнительного члена в известной формуле квадратур Гаусса и других аналогичных формулах.

Впрочем, я получил выражение для этого дополнительного члена, следуя ещё другому пути, где за отправной пункт я принимал точное выражение для дополнительного члена в интерполяционной формуле Лагранжа, которое Вы дали в Journal de Crelle, т. 84.

Этот новый вывод был опубликован на французском языке в статье, помещённой в Mathematische Annalen, 1885 г. В последнее время я пришёл к заключению, что теоремы, вполне аналогичные предыдущим (отвлекаясь от формул, служащих для определения расстояний от искомых точек до точки A), могут быть высказаны в весьма общем случае, когда задаются интегралы

$$\int_0^l f(y)\cdot\lambda_1(y)\,dy,\quad \int_0^l f(y)\cdot\lambda_2(y)\,dy,\ \ldots,$$

$$\ldots,\ \int_0^l f(y)\cdot\lambda_{n+1}(y)\,dy,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ — какие-либо данные функции, подчинённые только условиям, чтобы определители

$$\lambda_1,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1' & \lambda_2' \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' \\ \lambda_1'' & \lambda_2'' & \lambda_3'' \end{vmatrix},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1} \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \ldots & \lambda_{n+1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n-1)} \\ \lambda_1^{(n)} & \lambda_2^{(n)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

были всюду положительны между пределами $y=0$ и $y=l$, и речь идёт о максимуме и минимуме интегралов

$$\int_0^l \Omega(y) f(y) dy \quad \text{и} \quad \int_0^v \Omega(y) f(y) dy.$$

Единственно, когда требуется найти максимум и минимум первого интеграла, нужно ограничить функцию $\Omega(y)$ условием, чтобы

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1} & \Omega \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \ldots & \lambda_{n+1}' & \Omega' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{(n)} & \lambda_2^{(n)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n)} & \Omega^{(n)} \\ \lambda_1^{(n+1)} & \lambda_2^{(n+1)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n+1)} & \Omega^{(n+1)} \end{vmatrix} > 0$$

для всех значений y от 0 до l, и, при исследовании на максимум и минимум второго интеграла, на $\Omega(y)$ нужно наложить $n+2$ аналогичных условий. Эти ограничения мне необходимы, чтобы суметь распространить некоторые предложения, относящиеся к полиномам, на функции вида

$$p_1\lambda_1(y) + p_2\lambda_2(y) + \ldots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(y),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ означают постоянные.

Так, например, вместо теоремы I я могу высказать следующую теорему:

Обобщённая теорема I. *Для нечётного n, равного $2k-1$, максимум и минимум интеграла*

$$\int_0^v \Omega(y) f(y) dy$$

соответствует распределению массы отрезка AB в точке D, в одной из точек A и B и в некоторых других $k-1$ точках.

Три другие теоремы могут быть обобщены аналогичным образом.

Заканчивая, я должен заметить, что Стильтьес доказал неравенства Чебышева почти одновременно со мной и, кроме того, в заметке в Comptes rendus (ноябрь 1884) указал предложение, аналогичное теоремам II и IV.

Это предложение Стильтьеса содержится в моих обобщённых теоремах II и IV как частный случай.

3 Зак. 1254. А. А. Марков.

3. О КОРНЯХ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ. I.

Уравнения, о которых мы будем говорить, связаны с разложением в непрерывную дробь функции

$$F(z)=\int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\,dy-\xi\int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\,dy. \tag{1}$$

Мы здесь предполагаем числа a, b, c; d и параметр ξ действительными и разности $b-a$, $c-b$, $d-c$, а также функции $g(y)$ и $f(y)$ положительными (по крайней мере для $a<y<b$ и для $c<y<d$).

Положим вообще

$$\int_a^b y^i g(y)\,dy=\alpha_i, \quad \int_c^d y^i f(y)\,dy=\beta_i. \tag{2}$$

Пусть теперь $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$ — одна из подходящих дробей к функции $F(z)$ и

$$\varphi_n(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_nz^n. \tag{3}$$

Мы будем иметь *) систему уравнений первой степени

$$\left.\begin{array}{l} p_0(\alpha_0-\xi\beta_0)+p_1(\alpha_1-\xi\beta_1)+\ldots+p_n(\alpha_n-\xi\beta_n)=0,\\ p_0(\alpha_1-\xi\beta_1)+p_1(\alpha_2-\xi\beta_2)+\ldots+p_n(\alpha_{n+1}-\xi\beta_{n+1})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_0(\alpha_{n-1}-\xi\beta_{n-1})+p_1(\alpha_n-\xi\beta_n)+\ldots+p_n(\alpha_{2n-1}-\xi\beta_{2n-1})=0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

*) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. 1878, стр. 287.

которая определяет отношения

$$\frac{p_0}{p_n},\ \frac{p_1}{p_n},\ \ldots,\ \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

Эти отношения выражаются дробями, знаменатели которых равны полиному степени n относительно ξ:

$$\Phi_n(\xi)=\begin{vmatrix} \alpha_0-\xi\beta_0 & \alpha_1-\xi\beta_1 & \ldots & \alpha_{n-1}-\xi\beta_{n-1} \\ \alpha_1-\xi\beta_1 & \alpha_2-\xi\beta_2 & \ldots & \alpha_n-\xi\beta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1}-\xi\beta_{n-1} & \alpha_n-\xi\beta_n & \ldots & \alpha_{2n-2}-\xi\beta_{2n-2} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Исключение — только в случаях, когда $\Phi_n(\xi)=0$. В этих исключительных случаях можно положить $p_n=0$ и понизить, таким образом, степень функции $\varphi_n(z)$, удовлетворяющей уравнениям (4).

Для нашей цели важно заметить, что если $\Phi_n(\xi)\neq 0$, то все корни уравнения n-й степени

$$\varphi_n(z)=0$$

являются конечными, благодаря чему, при неограниченном возрастании одного из корней последнего уравнения, величина ξ приближается к одному из корней уравнения

$$\Phi_n(\xi)=0.$$

Вопрос, которому посвящена настоящая заметка, по существу, состоит в определении числа корней уравнения $\varphi_n(z)=0$, заключённых в интервалах

$$(-\infty,\ a),\ (a,\ b),\ (b,\ c),\ (c,\ d),\ (d,+\infty).$$

Решение этого вопроса содержится в следующих теоремах:

Теорема 1. *Функция $\varphi_n(z)$ меняет свой знак в интервалах $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ по крайней мере $n-1$ раз.*

Доказательство. Предположим, что функция $\varphi_n(z)$ меняет свой знак ровно m раз в интервалах (a, b) и (c, d) а именно при

$$z = x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_m,$$

и образуем функции

$$\theta(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_m), \quad \theta_1(z) = (z - \varepsilon)\,\theta(z),$$

где ε — какое-либо число, заключённое между b и c. Тогда произведения

$$\varphi_n(z)\cdot\theta(z) \quad \text{и} \quad \varphi_n(z)\cdot\theta_1(z)$$

не меняют своих знаков ни в интервале (a, b), ни в интервале (c, d): в первом из этих интервалов они имеют противоположные знаки и во втором — одинаковые.

Отсюда легко видеть, что одно из выражений

$$\int_a^b g(y)\,\theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy \qquad (A)$$

и

$$\int_a^b g(y)\,\theta_1(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\theta_1(y)\,\varphi_n(y)\,dy \qquad (B)$$

не равно нулю.

Но, в силу уравнений (4), выражение (A) обращается в нуль, если $m < n$, и выражение (B), — если $m < n - 1$.

Следовательно, во всех случаях m не может быть меньше чем $n - 1$.

Примечание 1. Если $\xi > 0$, то все корни уравнения $\varphi_n(z) = 0$ попадают в интервалы

$$(-\infty, \ b), \quad (c, \ +\infty).$$

Если $\xi < 0$, то все корни этого уравнения лежат между a и d.

Примечание 2. Для $\xi = 0$ все корни уравнения $\varphi_n(z) = 0$ заключены между a и b.

Напротив, для $\xi = \pm\infty$ все корни того же уравнения заключены между c и d, ибо тогда функция $-\frac{F(z)}{\xi}$ обращается в

$$\int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\,dy.$$

Следствие. Уравнение $\varphi_n(z)=0$ не имеет равных корней; другими словами, производная $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial z}$ не может обращаться в нуль, когда $\varphi_n(z)=0$.

Лемма. Производная $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial\xi}$ не может обращаться в нуль, когда $\varphi_n(z)=0$.

Доказательство. В силу уравнений (4) мы имеем

$$\int_a^b g(y)\cdot\theta(y)\cdot\varphi_n(y)\,dy-\xi\int_c^d f(y)\,\theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy=0 \tag{6}$$

для любого полинома $\theta(z)$ степени $n-1$.

Дифференцируя уравнение (6) и полагая $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial\xi}=\omega_n(z)$, мы заключаем, что

$$\int_a^b g(y)\,\theta(y)\,\omega_n(y)\,dy-\xi\int_c^d f(y)\,\theta(y)\,\omega_n(y)\,dy-$$
$$-\int_c^d f(y)\,\theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy=0. \tag{7}$$

Допустим теперь, что уравнения

$$\varphi_n(z)=0 \quad \text{и} \quad \omega_n(z)=0$$

имеют общий корень $z=\tau$.

Тогда ничто нам не мешает положить

$$\theta(z)=\frac{\omega_n(z)}{z-\tau}$$

в формуле (6) и

$$\theta(z) = \frac{\varphi_n(z)}{z-\varepsilon}$$

в формуле (7).

Таким образом, мы будем иметь следующие уравнения:

$$\int_a^b g(y)\frac{\varphi_n(y)\,\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy - \xi\int_c^d f(y)\frac{\varphi_n(y)\,\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy = 0,$$

$$\int_a^b g(y)\frac{\varphi_n(y)\,\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy - \xi\int_c^d f(y)\frac{\varphi_n(y)\,\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy - \\ - \int_c^d f(y)\frac{\varphi_n(y)\,\varphi_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy = 0,$$

откуда следует, что

$$\int_c^d f(y)\frac{\varphi_n(y)\,\varphi_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy = 0$$

и затем

$$\int_c^b g(y)\frac{\varphi_n(y)\,\varphi_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy = 0.$$

Но последние два равенства невозможны.

Это противоречие показывает, что функции $\varphi_n(z)$ и $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial\xi}$ не могут одновременно обращаться в нуль.

Следствие. Когда ξ непрерывно убывает от 0 до $-\infty$, всякий корень уравнения $\varphi_n(z) = 0$ также меняется непрерывно и притом в одном и том же направлении: именно, он возрастает, ибо он переходит из интервала (a, b) в интервал (c, d).

Если же ξ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, то каждый корень уравнения, также изменяясь непрерывно, всегда убывает, исключая случаи, когда этот корень перескакивает через $\pm\infty$.

Отсюда вытекают следующие теоремы:

Теорема 2. *Когда ξ убывает от 0 до $-\infty$, все корни уравнения $\varphi_n(z)=0$, перескакивая последовательно через b и c, переходят из интервала (a, b) в интервал (c, d).*

Следовательно, все корни уравнений

$$\varphi_n(b)=0 \quad \text{и} \quad \varphi_n(c)=0$$

степени n относительно неизвестной ξ действительны и отрицательны. Если мы обозначим корни уравнения $\varphi_n(b)=0$, расположенные в порядке убывания, через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, а уравнения $\varphi_n(c)=0$ — через $\eta_1', \eta_2', \ldots, \eta_n'$, то будем иметь следующие неравенства:

$$\eta_1 > \eta_1' > \eta_2 > \eta_2' > \ldots > \eta_n > \eta_n'.$$

Наконец, что касается корней уравнения $\varphi_n(z)=0$, мы можем утверждать, что для $\eta_i > \xi > \eta_i'$ $n-i$ из них заключены между a и b, один — между b и c, $i-1$ — между c и d, а для $\eta_i' > \xi > \eta_{i+1}$ $n-i$ из них заключены между a и b и i — между c и d.

Примечание. Пусть

$$z = x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$$

— все корни уравнения $\varphi_n(z)=0$, расположенные в порядке возрастания.

Тогда неравенствам

$$0 > \sigma > \sigma'$$

соответствует неравенство

$$(x_i)_{\xi=\sigma} < (x_i)_{\xi=\sigma'}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\sigma} > \left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\sigma'}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Когда ξ возрастает от 0 до $+\infty$, все корни уравнения $\varphi_n(z)=0$, перескакивая последовательно через*

$$a, \quad -\infty, \quad +\infty, \quad d,$$

попадают из интервала (a, b) в интервал (c, d).

Отсюда следует, что все корни уравнений

$$\varphi_n(a)=0, \quad \Phi_n(\xi)=0, \quad \varphi_n(d)=0$$

степени n относительно неизвестной ξ действительны и положительны. Если расположенными в порядке возрастания корнями уравнений

$$\begin{array}{lcl} \varphi_n(a)=0 & \text{являются} & \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \\ \Phi_n(\xi)=0 & » & \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n, \\ \varphi_n(d)=0 & » & \xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_n, \end{array}$$

то мы будем иметь следующие неравенства:

$$\xi_1<\xi'_1<\xi''_1<\xi_2<\xi'_2<\xi''_2<\ldots<\xi_n<\xi'_n<\xi''_n.$$

Наконец, что касается корней уравнения $\varphi_n(z)=0$, то мы можем утверждать, что для $\xi_i<\xi<\xi'_i$ $n-i$ из них заключены между a и b, один — между a и $-\infty$, $i-1$ — между c и d; для $\xi'_i<\xi<\xi''_i$ $n-i$ из них заключены между a и b, один между $+\infty$ и d, $i-1$ — между c и d; для $\xi''_i<\xi<\xi_{i+1}$ $n-i$ из них заключены между a и b, i — между c и d.

Примечание. Пусть для $\xi>0$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

— все корни уравнения $\varphi_n(z)=0$, расположенные в том же порядке, который представляют числа

$$b, \quad a, \quad -\infty, \quad +\infty, \quad d, \quad c.$$

Пусть ещё h — какое-либо число, заключённое между b и c.

Тогда неравенствам

$$0 < \tau < \tau'$$

соответствует неравенство

$$\left(\frac{1}{h - x_i}\right)_{\xi=\tau} > \left(\frac{1}{h - x_i}\right)_{\xi=\tau'}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\tau} > \left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\tau'}. \tag{9}$$

Лемма.

$$\begin{aligned} p_n\Phi_{n+1}(\xi) = \Phi_n(\xi)\{p_0(\alpha_n - \xi\beta_n) + p_1(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) + \ldots \\ \ldots + p_{n-1}(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) + p_n(\alpha_{2n} - \xi\beta_{2n})\} = \\ = \Phi_n(\xi)\left\{\int_a^b g(y)y^n\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)y^n\varphi_n(y)\,dy\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Мы получаем эту формулу с помощью теоремы о разложении определителя по элементам какого-нибудь столбца.

Лемма. Если ξ — корень уравнения $\varphi_n(a) = 0$, то произведение $\Phi_{n+1}(\xi) \cdot \Phi_n(\xi)$ отрицательно; напротив, для корня уравнения $\varphi_n(d) = 0$ то же произведение положительно.

Доказательство. Для $\varphi_n(a) = 0$ выражение $\frac{\varphi_n(z)(z-b)}{z-a}$ представляет полином степени n относительно z. Коэффициент этого полинома при z^n равен p_n. Формулу (10) легко тогда преобразовать в следующую формулу:

$$\begin{aligned} p_n^2\Phi_{n+1}(\xi)\,\Phi_n(\xi) = (\Phi_n(\xi))^2\left\{\int_a^b g(y)\,\frac{(\varphi_n(y))^2(y-b)}{y-a}\,dy - \right. \\ \left. - \xi\int_c^d f(y)\,\frac{(\varphi_n(y))^2(y-b)}{y-a}\,dy\right\}, \end{aligned}$$

откуда мы немедленно выводим неравенство

$$\Phi_n(\xi)\cdot\Phi_{n+1}(\xi)<0.$$

Таким же образом можно доказать вторую часть нашей леммы.

Следствие. Все корни уравнения

$$\Phi_{n+1}(\xi)=0$$

расположены по одному, в интервалах

$$(0,\xi_1),\ (\xi_1'',\xi_2),\ (\xi_2'',\xi_3),\ \ldots,\ (\xi_{n-1}'',\xi_n),\ (\xi_n'',+\infty).$$

Теорема 4. *Пусть*

$$\xi_1^0,\ \xi_2^0,\ \ldots,\ \xi_{n+1}^0$$

— все корни уравнения $\Phi_{n+1}(\xi)=0$, *расположенные в порядке возрастания.*

Тогда для

$$\xi=\xi_k^0$$

$n-k+1$ *корней уравнения*

$$\varphi_n(z)=0$$

заключены между a *и* b, *а остальные* $k-1$ — *между* c *и* d.

Одновременно мы имеем следующие неравенства:

$$\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\xi_k^0}>\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\xi_{k+1}^0},\tag{11}$$

$$\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\xi_k^0}>\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\xi_{k+1}^0},\tag{12}$$

где h — *какое-либо число, заключённое между* b *и* c.

Доказательство. Все выводы этой теоремы являются очевидными следствиями из предыдущих предложений, исключая неравенство (11).

Что касается этого последнего неравенства, то оно сводится к неравенству (8), если заметить, что для

$\Phi_{n+1}(\xi)=0$ функция $\varphi_n(z)$ становится знаменателем подходящей дроби к

$$F_1(z)=\int_a^b \frac{(b-y)\,g(y)}{z-y}\,dy-(-\xi)\int_c^d \frac{(y-b)\,f(y)}{z-y}\,dy,$$

где

$$(b-y)\,g(y)>0 \quad \text{для} \quad a<y<b$$

и

$$(y-b)\,f(y)>0 \quad \text{для} \quad c<y<d.$$

Замечание. Эти рассуждения во многих отношениях аналогичны рассуждениям Штурма о корнях некоторых уравнений, связанным с интегрированием линейных дифференциальных уравнений второго порядка *).

К тому же нужно заметить, что функции Ляме можно рассматривать как частные случаи функций $\varphi_n(z)$ **).

Отсюда легко увидеть связь между нашими теоремами и теоремами Клейна, дополненными Ляпуновым ***).

30 сентября 1885 г.

---

*) Sturm, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre*. Journal de Liouville, première série, t. I.

**) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, § 102.

Сохоцкий, Об определённых интегралах и функциях, которыми пользуются для разложений в ряды, 1873, глава II.

***) Klein, Über Lamésche Funktionen, Math. Annalen, XVIII.

Ляпунов, Об устойчивости равновесия эллипсоидальных форм вращающейся жидкости, глава IV. См. также Stieltjes, Sur certaines polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé. Acta Mathematica, VI.

4. О КОРНЯХ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ. II.

Пусть $V(y, \xi)$ — функция двух переменных y и ξ. Мы рассмотрим функцию

$$\varphi_n(y, \xi) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_{n-1} y + p_n, \qquad (1)$$

где коэффициенты

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{n-1},\ p_n$$

являются функциями одного переменного ξ и определяются условием

$$\int_a^b \varphi_n(y, \xi) \cdot V(y, \xi) \cdot \omega(y)\, dy = 0 \qquad (2)$$

для любого полинома $\omega(y)$ степени $n-1$.

Все встречающиеся у нас числа мы будем предполагать действительными.

Кроме того, мы будем предполагать, что $V(y, \xi)$ остаётся положительной для всех рассматриваемых значений ξ при условии $a < y < b$.

Тогда, как известно *), каждому значению ξ соответствуют n различных значений z,

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

---

*) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2-е изд., стр. 286—297.

удовлетворяющих уравнению

$$\varphi_n(z, \xi) = 0, \tag{3}$$

и все эти числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ содержатся между a и b. Для определённости положим:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b.$$

Цель настоящей заметки заключается в доказательстве нескольких предложений об изменениях x_i, соответствующих изменениям ξ.

Теорема. *Если для $a < y < b$ постоянно*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi}\right) > 0,$$

то все числа x_i возрастают, когда ξ возрастает.

Доказательство. Дифференцируя формулу (2) по ξ, будем иметь:

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} V \omega \, dy + \int_a^b \varphi_n \frac{\partial V}{\partial \xi} \omega \, dy = 0.$$

Положим теперь в последней формуле

$$\omega = \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i}$$

и в формуле (2)

$$\omega = \frac{\dfrac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{y - x_i}.$$

Таким образом, мы найдём, что

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V \, dy + \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} \, dy = 0$$

и

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}\right) \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V \, dy = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi} \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V\, dy =$$

$$= -\int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \cdot \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} dy. \quad (4)$$

Наконец, принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i} \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V(y, \xi)\, dy -$$

$$- \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{(y - x_i)^2} V(y, \xi)\, dy =$$

$$= \int_a^b \varphi_n(y, \xi) \frac{\dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i}(y - x_i) - \varphi_n(y, \xi)}{(y - x_i)^2} V(y, \xi)\, dy = 0$$

и

$$V(x_i, \xi) \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \cdot \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} dy =$$

$$= \int_a^b \left(V(x_i, \xi) \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - V(y, \xi) \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} \right) \frac{[\varphi_n(y, \xi)]^2}{y - x_i} dy,$$

легко преобразовать формулу (4) к виду

$$\frac{dx_i}{d\xi} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i}} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi) \frac{V(x_i, \xi) \dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - V(y, \xi) \dfrac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{y - x_i} dy}{V(x_i, \xi) \cdot \displaystyle\int_a^b \left(\frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \right)^2 V(y, \xi)\, dy}. \quad (5)$$

С другой стороны, в силу условия теоремы, выражение

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

должно возрастать или убывать одновременно с возрастанием или убыванием y, откуда следует, что разности

$$\frac{1}{V(y,\xi)}\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}-\frac{1}{V(x_i,\xi)}\frac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial \xi}=$$

$$=\frac{V(x_i,\xi)\dfrac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}-V(y,\xi)\dfrac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial \xi}}{V(y,\xi)_i\,V(x_i,\xi)}$$

и

$$y-x_i$$

должны иметь один и тот же знак.

Следовательно,

$$\frac{V(x_i,\xi)\dfrac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}-V(y,\xi)\dfrac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial \xi}}{y-x_i}>0.$$

Отсюда вытекает, что оба интеграла в формуле (5) положительны, а значит и величина $\frac{dx_i}{d\xi}$ положительна, т. е., другими словами, x_i и ξ возрастают и убывают одновременно.

Применение. Положим,

$$a=-1,\quad b=+1,\quad V(y,\xi)=\frac{(1+y)^{\alpha\xi}}{(1-y)^{\beta\xi}}f(y).$$

Тогда

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \xi}=\alpha\ln(1+y)-\beta\ln(1-y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)=\frac{\alpha}{1+y}+\frac{\beta}{1-y}.$$

Следовательно, все условия предыдущей теоремы будут выполнены, если

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ f(y)>0 \text{ для } -1<y<+1.$$

Остановимся на случае, когда

$$\alpha=\beta=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad f(y)=1,$$

и рассмотрим функции

$$\varphi_n(y,-1), \quad \varphi_n(y,0), \quad \varphi_n(y,1).$$

В этих случаях можно положить:

$$\varphi_n(y,-1)=\frac{\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos y\right\}}{\sqrt{1-y}},$$

$$\varphi_n(y,\ 0)=\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n},$$

$$\varphi_n(y,\ 1)=\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos y\right\}}{\sqrt{1+y}},$$

и следовательно, корни уравнения $\varphi_n(y,-1)=0$, расположенные в порядке возрастания, будут

$$\cos\frac{2n\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1},\ \ldots,\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$

и корни уравнения $\varphi_n(y,1)=0$, также расположенные в порядке возрастания, будут:

$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1},\ \ldots,\quad \cos\frac{3\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{\pi}{2n+1}.$$

Имея это, легко на основании предыдущей теоремы заключить, что корни известного уравнения

$$\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n}=0$$

находятся по одному в следующих интервалах:

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right),$$

$$\left(\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1},\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\right),\ \ldots,\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1},\cos\frac{\pi}{2n+1}\right).$$

Теорема. *Пусть*

$$\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} > 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(y-e)\,V(y, \xi)}{\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}}\right) < 0,$$

где e — число заключённое между a и b.

Тогда $(x_i - e)^2$ возрастает, когда ξ возрастает.

Доказательство. Легко преобразовать формулу (5) в следующую:

$$\frac{1}{2}\frac{d(x_i-e)^2}{d\xi} V(x_i, \xi) \int_a^b \left(\frac{\varphi_n(y, \xi)}{y-x_i}\right)^2 V(y, \xi)\,dy =$$

$$= \int_a^b \varphi_n(y, \xi)\cdot\varphi_n(y, \xi) \times$$

$$\times \frac{(x_i-e)\,V(x_i, \xi)\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - (y-e)\,V(y, \xi)\frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{y-x_i}\,dy +$$

$$+ \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi}\int_a^b \varphi_n(y, \xi)\cdot\varphi_n(y, \xi)\cdot V(y, \xi)\,dy,$$

и наше предложение немедленно вытекает из этой формулы.

Применение. Положим

$$a = -1, \quad b = +1, \quad e = 0, \quad V(y, \xi) = (1-y^2)^{-\xi}.$$

В этом случае условия предыдущей теоремы выполнены, ибо для $-1 < y < 1$

$$\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} = -(1-y^2)^{-\xi}\ln(1-y^2) > 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\cdot V(y, \xi)}{\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}}\right] = -\frac{\ln(1-y^2) + \frac{2y^2}{1-y^2}}{\{\ln(1-y^2)\}^2} < 0.$$

Рассматривая теперь функции

$$\varphi_n\left(y, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_n(y, 0), \quad \varphi_n\left(y, -\frac{1}{2}\right),$$

которые, в силу наших условий, обращаются в

$$\cos(n \arccos y), \quad \frac{d^n (y^2-1)^n}{dy^n}, \quad \frac{\sin((n+1)\arccos y)}{\sqrt{1-y^2}},$$

мы можем заключить, что корни уравнения

$$\frac{d^n (y^2-1)^n}{dy^n} = 0$$

заключены по одному в следующих интервалах:

$$\left(\cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{\pi}{n+1}\right), \quad \left(\cos\frac{3\pi}{2n}, \cos\frac{2\pi}{n+1}\right),$$

$$\left(\cos\frac{5\pi}{2n}, \cos\frac{3\pi}{n+1}\right), \ldots, \quad \left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}, \cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Эти интервалы более узкие, чем предыдущие.

Петербург, 17 ноября 1885 г.

5. ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

В настоящей статье мы будем рассматривать совокупность тех целых функций

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \ldots + p_{n-1} z + p_n,$$

степень которых не превосходит данного целого числа n, а численные значения не превосходят другого данного числа L для всех значений переменной z, лежащих между данными пределами a и $b > a$.

Итак,

$$-L \leqslant f(z) \leqslant +L \quad \text{при} \quad a \leqslant z \leqslant b.$$

Спрашивается, какого предела не превосходит численное значение производной

$$f'(x) = np_0 x^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + \ldots + 2p_{n-2} x + p_{n-1}$$

от $f(x)$ по x?

Такой вопрос поставлен Д. И. Менделеевым, при $n = 2$, в его сочинении «Исследование водных растворов по удельному весу» (§ 86).

Ответ зависит от того, насколько определено число x.

Мы различим два случая:

1) x — число данное,

2) x — произвольное число между a и b.

Соответственно этому рассмотрим две задачи.

Задача № 1. *Для данного числа x найти наибольшее численное значение $f'(x)$.*

Решение. Обозначим через y ту из рассматриваемых нами функций $f(z)$, для которой $f'(x)$ численно достигает наибольшего значения.

По условиям вопроса

$$-L \leqslant y \leqslant +L$$

для всех значений z, лежащих между a и b.

Из всех этих значений z обратим особое внимание на те, при которых y равняется $\pm L$.

Пусть в возрастающем порядке они будут

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_s.$$

Обозначив через

$$y(\alpha_i)$$

значение y при $z=\alpha_i$, равное $\pm L$, заметим, что ряд $s-1$ отношений

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \ldots, \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})}$$

должен содержать по крайней мере $n-1$ чисел, равных -1.

Действительно, в противном случае между целыми функциями $n-2$-й степени от z нетрудно найти бесчисленное множество таких, отношения которых к y при

$$z=\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

—числа отрицательные.

Если затем, умножив одну из них

$$\varphi(z)$$

на $(z-x)^2$ и на достаточно малое положительное число ε, произведение

$$\varepsilon(z-x)^2\varphi(z)$$

прибавим к y, то получим целую функцию

$$Y=y+\varepsilon(z-x)^2\varphi(z)$$

n-й степени от z и притом такую, что при $a \leqslant z \leqslant b$ численное значение $Y < L$ и при $z = x$

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dy}{dz}.$$

Наконец, если умножим Y на отношение числа L к наибольшему численному значению Y при $a \leqslant z \leqslant b$, то полученная таким образом новая функция будет принадлежать к числу рассматриваемых нами функций $f(z)$ и при $z = x$ её производная численно больше $\frac{dy}{dz}$.

Итак, s не меньше n, и ряд отношений

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \ \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \ \ldots, \ \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})} \tag{1}$$

содержит не менее $n-1$ чисел, равных -1.

Если -1 встречается n раз в ряду (1), то, как известно, y приводится к

$$\pm L \cos n \arccos \frac{2z-a-b}{b-a} = \pm f_0(z).$$

Вместе с тем имеем

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\pm nL}{\sqrt{(z-a)(b-z)}} \sin n \arccos \frac{2z-a-b}{b-a} = \pm f_0'(z).$$

Исследуем условия, при которых наибольшее численное значение $f'(x)$ действительно равно численному значению $f_0'(x)$.

Так как мы занимаемся численными значениями, то из всех функций $f(z)$ можем ограничиться только теми, для которых $f'(x)$ имеет одинаковый знак с $f_0'(x)$.

Положим для краткости

$$\frac{b-a}{2} \cos \frac{i\pi}{n} + \frac{b+a}{2} = \xi_{n-i} \quad \text{при} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

и

$$f(z) - f_0(z) = \varphi(z).$$

Рассматривая значение $f(z)$ и $f_0(z)$ при

$$z=\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,$$

находим:

$$\begin{aligned}
f_0(\xi_n) &= +L \quad \text{и потому } \varphi(\xi_n)\leqslant 0,\\
f_0(\xi_{n-1}) &= -L \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \varphi(\xi_{n-1})\geqslant 0,\\
f_0(\xi_{n-2}) &= +L \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \varphi(\xi_{n-2})\leqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_0(\xi_0) &= (-1)^n L \quad \text{и потому } (-1)^n\varphi(\xi_0)\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение

$$\varphi(z)=0$$

должно иметь по одному корню между ξ_0 и ξ_1, между ξ_1 и ξ_2, ..., между ξ_{n-1} и ξ_n.

Иначе сказать, функция $\varphi(z)$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z:

$$\varphi(z)=q(z-\eta_1)(z-\eta_2)\ldots(z-\eta_n),$$

причём

$$a=\xi_0\leqslant\eta_1\leqslant\xi_1\leqslant\eta_2\leqslant\xi_2\leqslant\ldots\leqslant\xi_{n-1}\leqslant\eta_n\leqslant\xi_n=b.$$

Что касается коэффициента q, то он должен быть отрицательным.

Вместе с тем имеем

$$f'(x)=f_0'(x)+\left(\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{1}{x-\eta_n}\right)\varphi(x)$$

и

$$f_0'(x)=\frac{2^{2n-1}nL}{(b-a)^n}(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{n-1}),$$

так как $f_0'(z)$ обращается в нуль при

$$z=\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1}$$

и старший член целой функции $f_0(z)$ равен:

$$\frac{2^{2n-1}Lz^n}{(b-a)^n}$$

Остановимся сначала на том случае, когда x лежит вне пределов a и b.

Тогда каждое из выражений

$$\frac{\varphi(x)}{x-\eta_1}, \quad \frac{\varphi(x)}{x-\eta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(x)}{x-\eta_n}$$

имеет знак, противоположный знаку $f_0'(x)$ и потому численное значение $f'(x) <$ численного значения $f_0'(x)$.

Итак, если x лежит вне пределов a и b, то наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_0'(x)$.

Положим теперь, что x заключается между ξ_{i-1} и ξ_i. Тогда

$$\frac{\varphi(x)}{x-\eta_i} = q(x-\eta_1)(x-\eta_2)\ldots(x-\eta_{i-1})(x-\eta_{i+1})\ldots(x-\eta_n)$$

имеет знак, противоположный знаку $f_0'(x)$.

Остаётся рассмотреть знак суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_{i-1}} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_i} + \ldots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_n} = \sum,$$

которую мы для краткости обозначаем одной буквой $\sum$.

У нас $f(z)$ означает какую угодно из целых функций n-й степени от z, удовлетворяющих условиям

$$-L \leqslant f(z) \leqslant +L \quad \text{при} \quad a \leqslant z \leqslant b$$

и

$$\frac{f'(x)}{f_0'(x)} > 0.$$

Поэтому числа

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \ldots, \ \eta_n$$

могут получать какие угодно значения, лишь бы только имели место неравенства

$$\xi_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant \eta_n \leqslant \xi_n$$

и коэффициент q численно был достаточно мал.

Приняв во внимание это замечание, нетрудно убедиться, что наименьшее (предельное) значение суммы Σ равно наименьшему из чисел

$$\frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_0}+\frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_1}+\ldots+\frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_{n-1}}=$$
$$=(x-\xi_{i-1})\left\{\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-a}\right\}$$

и

$$\frac{x-\xi_i}{x-\xi_1}+\frac{x-\xi_i}{x-\xi_2}+\ldots+\frac{x-\xi_i}{x-\xi_n}=$$
$$=(x-\xi_i)\left\{\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-b}\right\}.$$

Если наименьшее значение Σ — число положительное, то и все значения Σ также числа положительные и знак выражения

$$\left(\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{1}{x-\eta_n}\right)\varphi(x)$$

противоположен знаку $f_0'(x)$; вместе с тем, конечно, численное значение $f'(x) <$ численного значения $f_0'(x)$.

Если же наименьшее значение Σ — число отрицательное, то неопределёнными числами

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно распорядиться так, что $f'(x)$ численно превзойдёт $f_0'(x)$.

Отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_0'(x)$ тогда и только тогда, когда x лежит вне пределов a и b или

$$a<x<b,\quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-a}>0 \quad \text{и} \quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-b}<0. \quad (2)$$

Вместо дробных выражений

$$\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-a} \quad \text{и} \quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-b}$$

можно рассматривать

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x) \quad \text{и} \quad (x-b)f_0''(x)+f_0'(x),$$

так как, во-первых, при соблюдении неравенств (2) выражения

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x) \quad \text{и} \quad (x-b)f_0''(x)+f_0'(x) \qquad (3)$$

имеют одинаковые знаки и, во-вторых, наши неравенства (2) наверно имеют место, если знаки выражений (3) одинаковы и $a<x<b$.

Рассмотрев таким образом случай

$$y=f_0(z),$$

обратимся к другим.

Если y не равно $f_0(z)$, то по доказанному ряд отношений

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)},\ \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)},\ \ldots,\ \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})} \qquad (1)$$

содержит $n-1$ чисел, равных -1.

Вместе с тем $s=n$, и из двух разностей

$$\alpha_1-a, \quad b-\alpha_n$$

должна обращаться в нуль по крайней мере одна.

Возьмём одну из функций $f(z)$, удовлетворяющих нашим условиям.

Уравнение

$$f(z)-y=0$$

n-й или низшей степени относительно z имеет по одному корню между α_1 и α_2, между α_2 и α_3, ..., между α_{n-1} и α_n.

Иначе сказать, разность $f(z)-y$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z:

$$f(z)-y=\psi(z)=(qz-r)(z-\eta_1)(z-\eta_2)\ldots(z-\eta_{n-1}),$$

причём

$$\alpha_1\leqslant\eta_1\leqslant\alpha_2\leqslant\eta_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_{n-1}\leqslant\eta_{n-1}\leqslant\alpha_n,$$

$$\frac{r}{q}\geqslant\alpha_n \quad \text{или} \quad \leqslant\alpha_1.$$

Вместе с тем имеем

$$f'(x) = \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=\alpha} + \\ + \left\{\frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_{n-1}} + \frac{1}{x-\eta_n}\right\}\psi(x),$$

где $\eta_n = \frac{r}{q}$.

Нетрудно также убедиться, что знак разности

$$qz - r$$

противоположен знаку $y(\alpha_n)$ при всех значениях z, лежащих между α_1 и α_n.

При соблюдении указанных нами условий числам

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно давать какие угодно значения, лишь бы только числовая величина коэффициента q была достаточно мала.

Допустим сначала, что x больше α_n.

Тогда при $\eta_n > x$ имеют место неравенства

$$0 < \frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_{n-1}} < \\ < \frac{1}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_n},$$

$$0 > \frac{1}{x-\eta_n} > -\infty,$$

и неопределённостью чисел

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно воспользоваться так, что выражение

$$\left\{\frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_n}\right\}\psi(x)$$

будет иметь какой угодно знак.

Следовательно, случай

$$x > \alpha_n$$

невозможен.

Совершенно так же докажем, что x не меньше α_1.

Положим затем, что x заключается между α_i и α_{i+1}.

Тогда знак

$$\frac{\psi(x)}{x-\eta_i}$$

противоположен знаку

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n),$$

и для того, чтобы $f'(x)$ по числовой величине было меньше $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$, знак суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_i}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

должен быть одинаков со знаком

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n)\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}.$$

А выражение

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n)\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$$

— число положительное, так как знак

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n)$$

одинаков со знаком $y(\alpha_{i+1})$ и со знаком $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что наименьшее значение суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_{i-1}}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_i}+\ldots+$$
$$+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_{n-1}}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

равно наименьшему из чисел

$$(x-\alpha_i)\left\{\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_i}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x-\alpha_{n-1}}+\frac{1}{x-\alpha_n}\right\},$$

$$(x-\alpha_{i+1})\left\{\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x-\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_{i+1}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x-\alpha_n}+\frac{1}{x-\alpha_1}\right\}$$

и потому не может быть ни больше, ни меньше нуля.

Таким образом, мы приходим к следующему условию:

$$\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_{n-1}}+\frac{1}{x-\alpha_n}=0. \qquad (4)$$

Наши рассуждения показывают также, что за исключением одного случая, когда одновременно

$$n=2, \quad \alpha_1=a, \quad \alpha_n=b, \quad x=\frac{a+b}{2},$$

производная $f'(x)$ достигает своего наибольшего численного значения только для двух функций $f(z)$ и эти последние отличаются друг от друга только знаком.

Если же

$$n=2 \quad \text{и} \quad x=\frac{a+b}{2},$$

то наибольшее численное значение $f'(x)$ равно $\frac{2L}{b-a}$ и соответствует бесчисленному множеству различных функций $f(z)$: именно, всем функциям вида

$$L\left\{\frac{2z-a-b}{b-a}+q(z-a)(z-b)\right\}$$

при

$$-\frac{2}{(b-a)^2}<q<\frac{2}{(b-a)^2}.$$

Вспомним, что из двух разностей

$$\alpha_1-a, \quad b-\alpha_n$$

одна по крайней мере обращается в нуль, и соответственно этому различим три случая:

1) $\alpha_1=a$, $\alpha_n<b$; 2) $\alpha_1>a$, $\alpha_n=b$; 3) $\alpha_1=a$, $\alpha_n=b$.

Если

$$\alpha_1=a \quad \text{и} \quad \alpha_n<b,$$

то к числам

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

можно прибавить ещё некоторое число

$$\alpha_{n+1},$$

которое больше b и удовлетворяет условию

$$y(\alpha_{n+1}) = -y(\alpha_n),$$

так как при непрерывном возрастании z от α_n до $+\infty$ отношение

$$\frac{-y}{y(\alpha_n)}$$

также постоянно возрастает от -1 до $+\infty$.

Вместе с тем имеем:

$$y = \pm L \cos n \arccos \frac{2z - a - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - a} = \pm f_1(z).$$

Неизвестное α_{n+1}, согласно условию (4), должно удовлетворять уравнению

$$\sum \frac{1}{x - \frac{a + \alpha_{n+1}}{2} - \frac{\alpha_{n+1} - a}{2} \cos \frac{i\pi}{n}} = 0,$$

т. е.

$$\frac{f_1''(x)}{f_1'(x)} + \frac{1}{x - a} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и, кроме того, неравенствам

$$\alpha_{n+1} > b > \frac{a + \alpha_{n+1}}{2} + \frac{\alpha_{n+1} - a}{2} \cos \frac{\pi}{n},$$

отсюда

$$\frac{b - a \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}} > \alpha_{n+1} > b.$$

Следовательно, для того чтобы случай

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_n < b$$

действительно имел место, одно из значений α_{n+1}, удовлетворяющих уравнению

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)=0, \tag{5}$$

должно заключаться между

$$\frac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} \quad \text{и} \quad b,$$

и только одно, так как в противном случае искомое нами наибольшее значение $f'(x)$ соответствовало бы нескольким различным функциям $f(z)$, а предыдущие рассуждения показывают невозможность этого.

Рассматривая затем сумму

$$\sum \frac{1}{x-\frac{a+\alpha_{n+1}}{2}-\frac{\alpha_{n+1}-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n}}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

как функцию от α_{n+1}, замечаем, что при непрерывном возрастании α_{n+1} эта функция постоянно возрастает, за исключением тех значений α_{n+1}, при которых она обращается в ∞.

Поэтому уравнение (5) не может иметь кратных корней.

Отсюда уже нетрудно заключить, что случай

$$\alpha_1=a, \quad \alpha_n<b$$

имеет место тогда и только тогда, когда при переходе α_{n+1} от b до $\dfrac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ выражение

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)$$

меняет свой знак.

Заметим ещё, что при $\alpha_{n+1}=b$ выражение

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)$$

обращается в

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x).$$

Совершенно так же, введя новое переменное число α_0 и положив

$$L\cos n\arccos\frac{2z-\alpha_0-b}{b-\alpha_0}=f_2(z),$$

убедимся, что случай

$$\alpha_1>a,\quad \alpha_n=b$$

имеет место тогда и только тогда, когда при переходе α_0 от $\dfrac{a-b\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ до a выражение $(x-b)f_2''(x)+f_2'(x)$ меняет свой знак.

Тогда

$$y=\pm f_2(z),$$

причём α_0 должно удовлетворять уравнению

$$(x-b)f_2''(x)+f_2'(x)=0$$

и неравенствам

$$\alpha_0<a<\frac{\alpha_0+b}{2}+\frac{b-\alpha_0}{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Обратимся к случаю

$$\alpha_1=a,\quad \alpha_n=b,$$

который имеет место тогда и только тогда, когда не может иметь места ни один из предыдущих случаев.

Если

$$\alpha_1=a\quad \text{и}\quad \alpha_n=b,$$

то уравнение

$$\frac{dy}{dz}=0$$

$n-1$-й степени относительно z имеет $n-2$ корня

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_{n-1}$$

между a и b и один корень вне этих пределов.

Обозначим этот последний буквой β и предположим для определённости $\beta > b$.

В таком случае численное значение y, при возрастании z от b до β, возрастает, а при дальнейшем возрастании z сначала убывает до нуля и затем возрастает беспредельно.

Вместе с тем, конечно, уравнение

$$y^2 - L^2 = 0$$

$2n$-й степени относительно z имеет, кроме $n-2$ двукратных корней

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_{n-1}$$

и двух простых

$$a, \ b,$$

ещё два корня, которые мы обозначим буквами

$$\gamma \text{ и } \delta.$$

Эти последние два корня больше β.

Следовательно,

$$y^2 - L^2 =$$
$$= p_0^2(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)^2 \ldots (z-\alpha_{n-1})^2(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)$$

и

$$\frac{dy}{dz} = np_0(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_{n-1})(z-\beta),$$

откуда выводим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y^2 - L^2 = \frac{(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)}{n^2(z-\beta)^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2. \qquad (6)$$

Е. И. Золотарёв в своей статье «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля» выразил решение последнего уравнения посредством эллиптических функций.

Не останавливаясь на формулах Е. И. Золотарёва, покажем, каким образом можно свести нашу задачу к трём алгебраическим уравнениям.

Для этой цели из уравнения (6) посредством дифференцирования выводим:

$$n^2(z-\beta)^3 y = (z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\beta)y'' + \\ + \frac{1}{2}(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\beta)\left\{\frac{1}{z-a} + \right. \\ \left. + \ldots + \frac{1}{z-\delta} - \frac{2}{z-\beta}\right\} y'. \quad (7)$$

Полагая затем

$$y = p_0(z-\beta)^n + p'_1(z-\beta)^{n-1} + \ldots + p'_{n-2}(z-\beta)^2 + p'_n,$$

располагаем обе части уравнения (7) по степеням $z-\beta$ и посредством сравнения коэффициентов приходим к системе $n+1$ уравнений с $n+2$ неизвестными

$$\frac{p'_1}{p_0},\ \frac{p'_2}{p_0},\ \ldots,\ \frac{p'_{n-2}}{p_0},\ \frac{p'_n}{p_0},\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Из этих уравнений нетрудно вывести выражения неизвестных

$$\frac{p'_1}{p_0},\ \frac{p'_2}{p_0},\ \ldots,\ \frac{p'_{n-2}}{p_0},\ \frac{p'_n}{p_0},$$

которые входят в них линейным образом через остальные три

$$\beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Исключая

$$\frac{p'_1}{p_0},\ \frac{p'_2}{p_0},\ \ldots,\ \frac{p'_{n-2}}{p_0},\ \frac{p'_n}{p_0},$$

приходим к двум алгебраическим уравнениям с неизвестными

$$\beta,\ \gamma,\ \delta.$$

А условие (4) даёт ещё третье уравнение

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)_{z=x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-\beta} = 0. \quad (8)$$

Что же касается коэффициента p_0, то он определяется из условия

$$y(a) = \pm L.$$

К этим же результатам придём и в том случае, когда β меньше a; только при $\beta < a$ числа γ и δ должны быть меньше β.

Для дальнейшего важно заметить, что во всяком случае выражение

$$\frac{(z-\gamma)(z-\delta)}{(z-\beta)^2}$$

больше единицы при всех значениях z, лежащих между a и b.

Покажем ещё, что уравнение (6) можно заменить двумя линейными дифференциальными уравнениями первого порядка с двумя неизвестными целыми функциями.

При этом для определённости будем считать

$$y(a) = L, \quad a < b < \beta < \gamma < \delta.$$

Пусть n — число чётное. Тогда, обозначив произведения

$$(z-a_2)(z-a_4)\ldots(z-a_{n-2})$$

и

$$(z-a_3)(z-a_5)\ldots(z-a_{n-1})$$

соответственно буквами

$$U \text{ и } V,$$

выводим

$$y - L = p_0(z-a)(z-\delta)V^2,$$

$$y + L = p_0(z-b)(z-\gamma)U^2,$$

$$y' = p_0\{2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V\}V =$$

$$= p_0\{2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U\}U =$$

$$= np_0(z-\beta)UV$$

и таким образом приходим к желаемым двум линейным дифференциальным уравнениям первого порядка

$$2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V = n(z-\beta)U,$$

$$2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U = n(z-\beta)V$$

Подобным же образом при n нечётном, обозначив произведения

$$(z-\alpha_2)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{n-1})$$

и

$$(z-\alpha_3)(z-\alpha_5)\ldots(z-\alpha_{n-2})$$

соответственно буквами

$$U \text{ и } V,$$

приходим к уравнениям

$$2(z-a)(z-b)(z-\gamma)V'+\{3z^2-2(a+b+\gamma)z+ \\ +ab+a\gamma+b\gamma\}V=n(z-\beta)U,$$

$$2(z-\delta)U'+U=n(z-\beta)V.$$

Примеры

1. $n=2$. В этом случае

$$f_0(z)=\frac{L}{(b-a)^2}\left\{8(z-a)(z-b)+(b-a)^2\right\},$$

$$f_0'(z)=\frac{8L}{(b-a)^2}(2z-a-b),\quad f_0''(z)=\frac{16L}{(b-a)^2}.$$

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)=\frac{8L}{(b-a)^2}(4x-3a-b),$$

$$(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)=\frac{8L}{(b-a)^2}(4x-3b-a).$$

Следовательно,

$$\text{при } x>\frac{3b+a}{4} \quad \text{и при} \quad x<\frac{3a+b}{4}$$

наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению

$$f_0'(x)=\frac{8L}{(b-a)^2}(2x-a-b).$$

Обращаясь затем к функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$, находим

$$f_1(z)=\frac{L}{(\alpha_3-a)^2}\{8(z-a)(z-\alpha_3)+(\alpha_3-a)^2\},$$

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)=\frac{8L}{(\alpha_3-a)^2}(4x-3a-\alpha_3),$$

$$f_2(z)=\frac{L}{(b-\alpha_0)^2}\{8(z-\alpha_0)(z-b)+(b-\alpha_0)^2\},$$

$$(x-b)f_2''(x)+f_2'(x)=\frac{8L}{(b-\alpha_0)^2}(4x-3b-\alpha_0),$$

$$\alpha_3=4x-3a,\quad \alpha_0=4x-3b$$

и отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при $\frac{3a+b}{4} < x < \frac{a+b}{2}$ равно $\frac{-8L}{(a_3-a)^2}(2x-a_3-a)=$ $=\frac{L}{x-a}$, а при $\frac{a+b}{2} < x < \frac{3b+a}{4}$ равно

$$\frac{8L}{(b-a_0)^2}(2x-a_0-b)=\frac{L}{b-x}.$$

Что же касается функции y, определяемой дифференциальным уравнением (6), то при $n=2$ она не играет в нашем вопросе никакой роли.

II. $n=3$.

Полагая для упрощения результатов

$$a=-1 \quad \text{и} \quad b=+1,$$

находим:

$$f_0(z)=L(4z^3-3z), \quad f_0'(z)=3L(4z^2-1), \quad f_0''(z)=24Lz,$$

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)=3L(12x^2+8x-1)=$$
$$=36L(x-\omega_1)(x-\omega_2),$$

$$(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)=3L(12x^2-8x-1)=$$
$$=36L(x-\omega')(x-\omega''),$$

где

$$\omega_1=\frac{-2-\sqrt{7}}{6}<\omega'=\frac{2-\sqrt{7}}{6}<\omega_2=$$
$$=\frac{-2+\sqrt{7}}{6}<\omega''=\frac{2+\sqrt{7}}{6}.$$

Следовательно, при $x<\omega_1$, при $\omega'<x<\omega_2$ и при $x>\omega''$ наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_0'(x)=3L(4x^2-1)$.

Обращаясь затем к функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$, находим:

$$f_1(z) = L\left\{4\left(\frac{2z+1-\alpha_4}{\alpha_4+1}\right)^3 - 3\,\frac{2z+1-\alpha_4}{\alpha_4+1}\right\},$$

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)=$$

$$= \frac{6L}{(\alpha_4+1)^3}\,\{16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+$$

$$+4(2x+1-\alpha_4)^2-(\alpha_4+1)^2\},$$

$$f_2(z) = L\left\{4\left(\frac{2z-1-\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^3 - 3\,\frac{2z-1-\alpha_0}{1-\alpha_0}\right\},$$

$$(x-b)f_2''(x)+f_2'(x)=$$

$$= \frac{6L}{(1-\alpha_0)^3}\,\{16(2x-1-\alpha_0)(x-1)+$$

$$+4(2x-1-\alpha_0)^2-(1-\alpha_0)^2\}.$$

Выражение

$$16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+4(2x+1-\alpha_4)^2-(\alpha_4+1)^2$$

при $\alpha_4 = 1$ обращается в

$$48x^2+32x-4 = 48(x-\omega_1)(x-\omega_2),$$

а при $\alpha_4 = \dfrac{1+\sin^2\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{6}} = \dfrac{5}{3}$ оно обращается в

$$32\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)+16\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{64}{9}=$$

$$=48x^2+\frac{32}{3}x-16 = 48(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2),$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{-1-\sqrt{28}}{9} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \frac{-1+\sqrt{28}}{9}.$$

Отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_1'(x)$ в тех случаях, когда $\omega_1 < x < \varepsilon_1$ или $\omega_2 < x < \varepsilon_2$.

При этом число α_4 должно быть определено из уравнения

$$16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+4(2x+1-\alpha_4)^2-(1+\alpha_4)^2=0.$$

Чтобы придать выражению $f_1'(x)$ возможно простой вид, положим

$$\alpha_4=-1+\xi \quad \text{и} \quad x+1=t.$$

Тогда

$$f_1'(x)=-tf_1''(x),$$

$$f_1''(x)=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2^2(2t-\xi)}{\xi^3}L=96\left\{2\left(\frac{t}{\xi}\right)^3-\left(\frac{t}{\xi}\right)^2\right\}\frac{L}{t^2},$$

$$48t^2-32t\xi+3\xi^2=0, \quad \frac{t}{\xi}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{12},$$

$$2\left(\frac{t}{\xi}\right)^3-\left(\frac{t}{\xi}\right)^2=\frac{10\pm 7\sqrt{7}}{144\cdot 6},$$

$$f_1'(x)=-\frac{10\pm 7\sqrt{7}}{9}\,\frac{L}{x+1}.$$

Из двух знаков $\pm$ при $\sqrt{7}$ надо остановиться на том, при котором

$$\alpha_4=-1+\frac{12}{4\pm\sqrt{7}}(x+1)$$

заключается между 1 и $\frac{5}{3}$.

А неравенства

$$\frac{5}{3}>\alpha_4>1$$

равносильны таким:

$$\frac{-1\pm\sqrt{28}}{9}>x>\frac{-2\pm\sqrt{7}}{6}.$$

Сопоставляя последние неравенства с найденными раньше

$$\omega_1 < x < \varepsilon_1 \quad \text{или} \quad \omega_2 < x < \varepsilon_2,$$

видим, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при $\omega_1 < x < \varepsilon_1$ равно $\frac{7\sqrt{7}-10}{9}\frac{L}{x+1}$, а при $\omega_2 < x < \varepsilon_2$ равно $\frac{7\sqrt{7}+10}{9}\frac{L}{x+1}$.

Совершенно так же, полагая

$$\frac{1-\sqrt{28}}{9} = \varepsilon' \quad \text{и} \quad \frac{1+\sqrt{28}}{9} = \varepsilon'',$$

убеждаемся, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при $\varepsilon'' < x < \omega''$ равно $\frac{7\sqrt{7}-10}{9}\frac{L}{1-x}$, а при $\varepsilon_1 < x < \omega'$ равно $\frac{7\sqrt{7}+10}{9}\frac{L}{1-x}$.

Если же x заключается между ε_1 и ε' или между ε_2 и ε'', то наибольшее численное значение $f'(x)$ соответствует той функции y, которая определяется уравнениями (6) и (8) при $n=3$, $a=-1$, $b=+1$.

В нашем примере дифференциальное уравнение (6) можно заменить двумя равенствами:

$$y - L = p_0(z^2-1)(z-\gamma),$$
$$y + L = p_0(z-\alpha_2)^2(z-\delta),$$

откуда затем выводим

$$\gamma = \delta + 2\alpha_2, \quad -1 = \alpha_2^2 + 2\alpha_2\delta, \quad -2L = p_0(\alpha_2^2\delta + \gamma),$$

$$\delta = -\frac{1+\alpha_2^2}{2\alpha_2}, \quad \gamma = \frac{3\alpha_2^2-1}{2\alpha_2}, \quad p_0 = \frac{4\alpha_2 L}{(1-\alpha_2^2)^2}.$$

А уравнение (8) обращается в следующее:

$$\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0.$$

Следовательно,

$$x-\alpha_2=\frac{1-x^2}{2x},\quad \alpha_2=\frac{3x^2-1}{2x},$$

$$1-\alpha_2=\frac{1+2x-3x^2}{2x}=\frac{(1-x)(1+3x)}{2x},$$

$$1-\gamma=\frac{(1-\alpha_2)(1+3\alpha_2)}{2\alpha_2},$$

$$1+\alpha_2=\frac{3x^2+2x-1}{2x}=\frac{(1+x)(3x-1)}{2x},$$

$$1+\gamma=\frac{(1+\alpha_2)(3\alpha_2-1)}{3\alpha_2},$$

$$1+3\alpha_2=\frac{9x^2+2x-3}{2x}=\frac{9(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)}{2x},$$

$$3\alpha_2-1=\frac{9x^2-2x-3}{2x}=\frac{9(x-\varepsilon')(x-\varepsilon'')}{2x},$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}=\frac{4\alpha_2 L}{(1-\alpha_2^2)^2}\left\{3x^2-\frac{3\alpha_2^2-1}{\alpha_2}x-1\right\}=$$

$$=\frac{4(x-\alpha_2)(3x\alpha_2+1)}{(1-\alpha_2^2)^2}L=-\frac{16x^3L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Теперь уже нетрудно убедиться, что при $\varepsilon_1<x<\varepsilon'$ и при $\varepsilon_2<x<\varepsilon''$ составленная нами функция y удовлетворяет всем вышеуказанным условиям и наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению

$$\frac{16x^3L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Задача № 2. *Найти наибольшее численное значение $f'(x)$ для всех x, лежащих между a и b.*

Решение. Решая предыдущую задачу, мы нашли все те функции $f(z)$, для которых $f'(x)$ численно достигает своего наибольшего значения.

Один из наших результатов состоит в том, что при

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f''(x)+f_0''(x)}>0$$

наибольшее численное значение $f'(x)$ равно

$$\text{числ. знач.} f_0(x) = \text{числ. знач.} \frac{nL \sin n \arccos \dfrac{2x-a-b}{b-a}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Положив затем

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\varphi,$$

находим:

$$f_0(x)=L\cos n\varphi,\ f_0'(x)=\frac{2nL\sin n\varphi}{(b-a)\sin\varphi},$$

$$f_0''(x)=\frac{4nL\{\sin n\varphi\cos\varphi-n\cos n\varphi\sin\varphi\}}{(b-a)^2\sin^3\varphi},$$

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\,\frac{\sin n\varphi+n\cos n\varphi\sin\varphi}{\sin n\varphi-n\cos n\varphi\sin\varphi}.$$

Если $0<\varphi<\frac{\pi}{2n}$ или $\pi>\varphi>\pi-\frac{\pi}{2\pi}$, то

$$\text{числ. знач. } \sin n\varphi > \text{числ. знач. } n\cos n\varphi\sin\varphi$$

и

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}>0.$$

С другой стороны, из формулы

$$f_0'(x)=\frac{2nL\sin n\varphi}{(b-a)\sin\varphi}$$

видно, что при $a \leqslant x \leqslant b$ наибольшее численное значение $f_0'(x)$ равно

$$\frac{2n^2L}{b-a}$$

и соответствует $x=a$ и $x=b$.

Поэтому для всех значений x, лежащих между a и $\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$ или между $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$ и b, наибольшее численное значение $f'(x)$ равно:

$$\frac{2n^2L}{b-a}.$$

Положим теперь, что x заключается между

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}.$$

В таком случае

$$(x-a)(b-x)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{b+a}{2}-x\right)^2>$$
$$>\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2n}>\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{1}{n^2}.$$

Производная $f'(x)$ достигает численно своего наибольшего значения для одной из вышеуказанных функций

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)$$

или для функции y, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6).

Но по замеченному

$$\text{числ. знач. } f_0'(x)<\frac{2n^2L}{b-a},$$

и совершенно так же убедимся, что

$$\text{числ. знач. } f_1'(x)<\frac{2n^2L}{\alpha_{n+1}-a}<\frac{2n^2L}{b-a}$$

и

$$\text{числ. знач. } f_2'(x)<\frac{2n^2L}{b-a_0}<\frac{2n^2L}{b-a}.$$

А из уравнения (6) при

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}<x<\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$$

вытекает неравенство

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2_{z=x}<\frac{n^2}{(x-a)(b-x)}L^2<\frac{4n^4}{(b-a)^2}L^2$$

и потому

$$\text{числ. знач.}\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}<\frac{2n^2L}{b-a}.$$

Все эти результаты показывают, что искомое нами наибольшее значение $f'(x)$ равно

$$\frac{2n^2L}{b-a}.$$

6. О ФУНКЦИЯХ, ПОЛУЧАЕМЫХ ПРИ ОБРАЩЕНИИ РЯДОВ В НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

Пусть будет

$$\frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\ldots$$

— ряд, расположенный по целым отрицательным степеням переменной x.

Последовательными делениями его можно превратить, как известно, в непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{q_1-\cfrac{1}{q_2-\cfrac{1}{q_3-\ldots}}},$$

где

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots$$

— целые функции от x.

Эти функции зависят, конечно, и от параметров

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots$$

Параметрам

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-2},\ S_{2m-1}$$

мы будем давать вещественные значения; притом только такие, чтобы ни один из определителей

$$\Delta_1 = S_0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-1} & S_m & S_{m+1} & \ldots & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

не обращался в нуль.

В таком случае

$$q_1, \ q_2, \ \ldots, \ q_k, \ \ldots, \ q_m$$

— целые функции первой степени относительно x.

Соответственно этому, обращая дроби

$$\frac{1}{q_1}, \quad \frac{1}{q_1 - \frac{1}{q_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{q_1 - \frac{1}{q_2 - \ldots - \frac{1}{q_k}}}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{1}{q_1 - \frac{1}{q_2 - \ldots - \frac{1}{q_m}}}$$

по известному способу в обыкновенные

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \quad \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)},$$

мы можем положить

$$\psi_k(x) = P_{0,k} + P_{1,k}\,x + P_{2,k}\,x^2 + \ldots + P_{k,k}\,x^k$$

и определять отношения

$$\frac{P_{0,k}}{P_{k,k}}, \quad \frac{P_{1,k}}{P_{k,k}}, \quad \frac{P_{2,k}}{P_{k,k}}, \quad \ldots, \quad \frac{P_{k-1,k}}{P_{k,k}}$$

из уравнений

$$\begin{gathered}
S_0P_{0,k}+S_1P_{1,k}+S_2P_{2,k}+\ldots+S_{k-1}P_{k-1,k}+S_kP_{k,k}=0,\\
S_1P_{0,k}+S_2P_{1,k}+S_3P_{2,k}+\ldots+S_kP_{k-1,k}+S_{k+1}P_{k,k}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_{k-1}P_{0,k}+S_kP_{1,k}+S_{k+1}P_{2,k}+\ldots+S_{2k-2}P_{k-1,k}+S_{2k-1}P_{k,k}=0.
\end{gathered}$$

Последние уравнения равносильны условию, что в произведении

$$\psi_k(x)\left\{\frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\ldots\right\}$$

должны пропадать члены, содержащие $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^k}$.

Отсюда вытекает формула

$$P_{i,k}=\frac{(-1)^i}{\quad}$$

$$\times\begin{vmatrix}
S_0 & S_1 & \ldots & S_{i-1} & S_{i+1} & \ldots & S_k\\
S_1 & S_2 & \ldots & S_i & S_{i+2} & \ldots & S_{k+1}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
S_{k-1} & S_k & \ldots & S_{k+i-2} & S_{k+i} & \ldots & S_{2k-1}
\end{vmatrix}.$$

Когда функция $\psi_k(x)$ составлена, нетрудно уже составить и функцию

$$\varphi_k(x)=Q_{0,k}+Q_{1,k}x+Q_{2,k}x^2+\ldots+Q_{k-1,k}x^{k-1},$$

которая должна быть равна целой части произведения

$$\psi_k(x)\left\{\frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\ldots\right\}.$$

Именно, в силу только что указанного требования можем написать следующие формулы:

$$\begin{aligned}
Q_{0,k}&=S_0P_{1,k}+S_1P_{2,k}+\ldots+S_{k-1}P_{k,k},\\
Q_{1,k}&=\qquad\quad S_0P_{2,k}+\ldots+S_{k-2}P_{k,k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Q_{k-1,k}&=\qquad\qquad\qquad\quad S_0P_{k,k}.
\end{aligned}$$

Коэффициент $P_{k,k}$ остаётся у нас пока неопределённым. Конечно, эта неопределённость пропадает в выражении дроби

$$\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}.$$

Если же мы хотим, чтобы числитель и знаменатель дроби

$$\frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)}$$

получались по известным формулам

$$\psi_1(x) = q_1, \quad \psi_2(x) = q_2\psi_1(x) - 1, \ \ldots,$$
$$\psi_m(x) = q_m\psi_{m-1}(x) - \psi_{m-2}(x),$$
$$\varphi_1(x) = 1, \ \varphi_2(x) = q_2, \ \ldots, \ \varphi_m(x) = q_m\varphi_{m-1}(x) - \varphi_{m-2}(x),$$

то должны удовлетворить уравнениям следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &S_0P_{1,k} + S_1P_{2,k} + \ldots + S_{k-1}P_{k,k})\,P_{0,k-1} - \\ &- P_{0,k}(S_0P_{1,k-1} + S_1P_{2,k-1} + \ldots + S_{k-2}P_{k-1,k-1}) \end{aligned}\right\} = 1,$$

т. е.

$$\varphi_k(0)\,\psi_{k-1}(0) - \varphi_{k-1}(0)\,\psi_k(0) = 1.$$

При рассмотрении условия

$$\varphi_k(0)\,\psi_{k-1}(0) - \varphi_{k-1}(0)\,\psi_k(0) = 1$$

полезно ввести определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{k-1} & S_k \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_k & S_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{k-1} & S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-2} & S_{2k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

и его миноры

$$\Delta_{i,j}$$

первого порядка.

Под $\Delta_{i,j}$ мы подразумеваем произведение $(-1)^{i+j}$ на определитель, получаемый из Δ вычёркиванием столбца

$$S_i,\ S_{i+1},\ S_{i+2},\ \ldots,\ S_{i+k-1},\begin{cases} 0 \text{ (при } i \neq k), \\ 1 \text{ (при } i = k) \end{cases}$$

и строки

$$S_j,\ S_{j+1},\ S_{j+2},\ \ldots,\ S_{j+k}$$

при $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$; если же $j = k$, надо вычеркнуть последнюю строку

$$0,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ 1.$$

Введя такие обозначения, мы можем представить отношения

$$\frac{P_{0,k}}{P_{k,k}},\ \frac{P_{1,k}}{P_{k,k}},\ \ldots,\ \frac{P_{k-1,k}}{P_{k,k}}$$

под видом дробей

$$\frac{\Delta_{0,k}}{\Delta},\ \frac{\Delta_{1,k}}{\Delta},\ \ldots,\ \frac{\Delta_{k-1,k}}{\Delta},$$

а отношения

$$\frac{P_{0,k-1}}{P_{k-1,k-1}},\ \frac{P_{1,k-1}}{P_{k-1,k-1}},\ \ldots,\ \frac{P_{k-2,k-1}}{P_{k-1,k-1}}$$

под видом дробей

$$\frac{\Delta_{0,k-1}}{\Delta_{k-1}},\ \frac{\Delta_{1,k-1}}{\Delta_{k-1}},\ \ldots,\ \frac{\Delta_{k-2,k-1}}{\Delta_{k-1}}.$$

Соответственно этому уравнение

$$\varphi_k(0)\psi_{k-1}(0) - \varphi_{k-1}(0)\psi_k(0) = 1,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} &(S_0P_{1,k} + S_1P_{2,k} + \ldots + S_{k-1}P_{k,k})\,P_{0,k-1} - \\ &-(S_0P_{1,k-1} + S_1P_{2,k-1} + \ldots + S_{k-2}P_{k-1,k-1})\,P_{0,k} \end{aligned}\right\} = 1,$$

мы можем представить в таком виде:

$$\left.\begin{array}{l}(S_0\Delta_{1,k}+S_1\Delta_{2,k}+\ldots+S_{k-2}\Delta_{k-1,k}+\\ \quad+S_{k-1}\Delta_{k,k})\,\Delta_{0,k-1}-(S_0\Delta_{1,k-1}+\\ \quad+S_1\Delta_{2,k-1}+\ldots+S_{k-2}\Delta_{k-1,k-1})\,\Delta_{0,k}\end{array}\right\}=\frac{\Delta_k\Delta_{k-1}}{P_{k,k}P_{k-1,k-1}}$$

или

$$\left.\begin{array}{l}S_0\,(\Delta_{1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{1,k-1})+\\ \quad+S_1\,(\Delta_{2,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{2,k-1})+\ldots\\ \ldots+S_{k-2}\,(\Delta_{k-1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{k-1,k-1})+\\ \quad+S_{k-1}\Delta_{k,k}\Delta_{0,k-1}\end{array}\right\}=\frac{\Delta_k\Delta_{k-1}}{P_{k,k}P_{k-1,k-1}}.$$

С другой стороны, в силу известных теорем учения об определителях, имеем

$$\frac{\Delta_{1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{1,k-1}}{\Delta}=\begin{vmatrix}S_2 & S_3 & \ldots & S_k\\ S_3 & S_4 & \ldots & S_{k+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-2}\end{vmatrix},$$

$$\frac{\Delta_{2,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{2,k-1}}{\Delta}=$$

$$=-\begin{vmatrix}S_1 & S_3 & S_4 & \ldots & S_k\\ S_2 & S_4 & S_5 & \ldots & S_{k+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ S_{k-1} & S_{k+1} & S_{k+2} & \ldots & S_{2k-2}\end{vmatrix},$$

$$\frac{\Delta_{3,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{3,k-1}}{\Delta}=$$

$$=\begin{vmatrix}S_1 & S_2 & S_4 & S_5 & \ldots & S_k\\ S_2 & S_3 & S_5 & S_6 & \ldots & S_{k+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ S_{k-1} & S_k & S_{k+2} & & \ldots & S_{2k-2}\end{vmatrix},$$

. . . .

6 Зак. 1954. А. А. Марков.

$$\frac{\Delta_{k-1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{k-1,k-1}}{\Delta}=$$

$$=(-1)^{k-2}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{k-2} & S_k \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{k-1} & S_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-1} & S_k & \dots & S_{2k-4} & S_{2k-2} \end{vmatrix}$$

и

$$\left.\begin{aligned} & S_0\begin{vmatrix} S_2 & S_3 & \dots & S_k \\ S_3 & S_4 & \dots & S_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_k & S_{k+1} & \dots & S_{2k-2} \end{vmatrix}- \\ & -S_1\begin{vmatrix} S_1 & S_3 & S_4 & \dots & S_k \\ S_2 & S_4 & S_5 & \dots & S_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-1} & S_{k+1} & \dots & \dots & S_{2k-2} \end{vmatrix}+\dots \\ & \dots+(-1)^{k-2}S_{k-2}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{k-2} & S_k \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{k-1} & S_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-1} & S_k & \dots & S_{2k-4} & S_{2k-2} \end{vmatrix}+ \\ & +(-1)^{k-1}S_{k-1}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{k-1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-1} & S_k & \dots & S_{2k-3} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\}=\Delta_k=\Delta.$$

Поэтому условие

$$\varphi_k(0)\psi_{k-1}(0)-\varphi_{k-1}(0)\psi_k(0)=1$$

приводится к следующему уравнению:

$$\Delta_k^2=\frac{\Delta_k\Delta_{k-1}}{P_{k,k}P_{k-1,k-1}}$$

или

$$P_{k-1,k-1}P_{k,k}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Вместе с тем мы должны положить

$$P_{1,1} = \frac{1}{S_0} = \frac{1}{\Delta_1}$$

для того, чтобы было

$$\varphi_1(x) = 1.$$

Отсюда последовательно выводим

$$P_{2,2} = \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2},$$

$$P_{3,3} = \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2 \Delta_3},$$

$$P_{4,4} = \frac{\Delta_1^2 \Delta_3^2}{\Delta_2^2 \Delta_4},$$

и вообще

$$P_{2l,2l} = \frac{\Delta_1^2 \Delta_3^2 \ldots \Delta_{2l-1}^2}{\Delta_2^2 \Delta_4^2 \ldots \Delta_{2l-2}^2 \Delta_{2l}},$$

$$P_{2l+1,2l+1} = \frac{\Delta_2^2 \Delta_4^2 \ldots \Delta_{2l}^2}{\Delta_1^2 \Delta_3^2 \ldots \Delta_{2l-1}^2 \Delta_{2l+1}}.$$

Таким образом, функции

$$\psi_k(x) \text{ и } \varphi_k(x)$$

нами определены вполне.

Наконец, мы можем определить

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_m$$

как целые части дробей

$$\frac{\psi_1(x)}{1}, \quad \frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\psi_k(x)}{\psi_{k-1}(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\psi_m(x)}{\psi_{m-1}(x)}.$$

Не останавливаясь на этом, заметим только, что коэффициент при x в выражении q_k равен отношению

$$\frac{P_{k,k}}{P_{k-1,k-1}}.$$

Обратимся теперь к корням уравнения

$$\psi_k(x) = 0,$$

которые условимся обозначать символом

$$x_{i,k},$$

отличая их друг от друга индексом i.

Введя их, мы можем представить дробь

$$\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}$$

в виде суммы *)

$$\sum \frac{R_{i,k}}{x - x_{i,k}},$$

где

$$R_{i,k} = \frac{\varphi_k(x_{i,k})}{\psi'_k(x_{i,k})}.$$

Разлагая нашу сумму

$$\sum \frac{R_{i,k}}{x - x_{i,k}}$$

в ряд по целым отрицательным степеням x и ограничиваясь теми членами, где $\frac{1}{x}$ входит в степени, меньшей чем $2k+1$, мы должны получить:

$$\frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \ldots + \frac{S_{2k-1}}{x^{2k}}.$$

Отсюда вытекают уравнения

$$\begin{aligned}
\sum R_{i,k} &= S_0,\\
\sum R_{i,k} x_{i,k} &= S_1,\\
\sum R_{i,k} x_{i,k}^2 &= S_2,\\
\cdots&\cdots\\
\sum R_{i,k} x_{i,k}^{2k-1} &= S_{2k-1},
\end{aligned}$$

*) Мы исключаем случай кратных корней.

которые послужат нам для решения вопроса о возрастании и убывании корней уравнения

$$\psi_k(x) = 0$$

при некоторых изменениях чисел

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2k-1}.$$

Предварительно, однако, ограничим параметры

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-2}$$

неравенствами

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_k > 0,\ \ldots,\ \Delta_m > 0.$$

При таком ограничении все коэффициенты

$$P_{1,1},\ P_{2,2},\ \ldots,\ P_{k,k},\ \ldots,\ P_{m,m}$$

будут числами положительными, как видно из предыдущих формул.

Соответственно этому ряд функций

$$\psi_m(x),\ \psi_{m-1}(x),\ \ldots,\ \psi_k(x),\ \psi_{k-1}(x),\ \ldots,\ \psi_1(x),\ 1$$

будет обладать всеми свойствами ряда Штурма, и ни одно из уравнений

$$\psi_m(x) = 0,\ \ \psi_{m-1}(x) = 0,\ \ldots,$$
$$\psi_k(x) = 0,\ \ldots,\ \psi_1(x) = 0$$

не будет допускать ни мнимых, ни кратных корней.

Числа же

$$R_{i,k} = \frac{\varphi_k(x_{i,k})}{\psi'_k(x_{i,k})} = \frac{1}{\psi_{k-1}(x_{i,k})\,\psi'_k(x_{i,k})}$$

будут у нас положительными, так как $\psi_{k-1}(x_{i,k})$ и $\psi'_k(x_{i,k})$ — числа одинакового знака.

Нетрудно видеть также, что все корни уравнений

$$\psi_m(x) = 0,\ \ \psi_{m-1}(x) = 0,\ \ldots,$$
$$\psi_k(x) = 0,\ \ldots,\ \psi_1(x) = 0$$

будут числами положительными, если к прежним неравенствам мы присоединим следующие *):

$$S_1>0,\quad \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \end{vmatrix}>0,\ \ldots$$

$$\ldots,\quad \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_m \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_m & S_{m+1} & S_{m+2} & \ldots & S_{2m-1} \end{vmatrix}>0.$$

В дальнейших выкладках для краткости ограничимся уравнением

$$\psi_m(x)=0,$$

корни которого условимся обозначать буквой x с одним значком i.

Заменим также $R_{i,m}$ на R_i.

Вопрос наш состоит в следующем: как изменяются корни x_i уравнения

$$\psi_m(x)=0$$

при бесконечно малых изменениях параметров

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-2},\ S_{2m-1}.$$

Другими словами, мы хотим составить производные $\frac{\partial x_i}{\partial S_l}$ и определить их знак при тех ограничительных условиях, которые нами установлены выше.

---

*) Действительно при выполнении этих неравенств ряд чисел

$$\psi_m(0),\ \psi_{m-1}(0),\ \ldots,\ \psi_1(0),\ 1$$

в силу приведённых выше выражений для $P_{\alpha,k}$ представляет одни перемены знака. (*Прим. ред.*)

Дифференцируя для этой цели уравнения

$$\sum R_i = S_0,\ \sum R_i x_i = S_1,\ \ldots,$$
$$\sum R_i x_i^l = S_l,\ \ldots,\ \sum R_i x_i^{2m-1} = S_{2m-1},$$

получаем:

$$\sum dR_i = dS_0,$$
$$\sum R_i dx_i + \sum x_i dR_i = dS_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum l R_i x_i^{l-1} dx_i + \sum x_i^l dR_i = dS_l,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum (2m-1) R_i x_i^{2m-2} dx_i + \sum x_i^{2m-1} dR_i = dS_{2m-1}.$$

Затем составляем определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & x_1 & \ldots & x_m \\ 2x_1 & 2x_2 & \ldots & 2x_m & x_1^2 & \ldots & x_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ lx_1^{l-1} & lx_2^{l-1} & \ldots & lx_m^{l-1} & x_1^l & \ldots & x_m^l \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2m-1)\times & (2m-1)\times & & (2m-1)\times & & & \\ \times x_1^{2m-2} & \times x_2^{2m-2} & \ldots & \times x_m^{2m-2} & x_1^{2m-1} & \ldots & x_m^{2m-1} \end{vmatrix} = D$$

и его миноры $D_{i,l}$ первого порядка при $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Здесь $D_{i,l}$ означает определитель, получаемый из D посредством вычёркивания столбца

$$0,\ 1,\ 2x_i,\ 3x_i^2,\ \ldots,\ lx_i^{l-1},\ \ldots,\ (2m-1)\,x_i^{2m-2}$$

и строки

$$lx_1^{l-1},\ lx_2^{l-1},\ \ldots,\ lx_m^{l-1},\ x_1^l,\ x_2^l,\ \ldots,\ x_m^l.$$

При таких обозначениях предыдущая система дифференциальных уравнений даёт:

$$R_i \frac{\partial x_i}{\partial S_l} = (-1)^{i+l+1} \frac{D_{i,\,l}}{D},$$

и нам остаётся только представить выражения $D_{i,\,l}$ и D в возможно простой форме.

Здесь полезно ввести определитель

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m & x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_m^2 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^{2m-1} & t_2^{2m-1} & \ldots & t_m^{2m-1} & x_1^{2m-1} & x_2^{2m-1} & \ldots & x_m^{2m-1} \end{vmatrix},$$

содержащий m произвольных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

Дело в том, что для определителя T известно простое выражение в виде произведения разностей чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m, x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$T = (x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m-2})\ldots(x_m - t_1)(x_{m-1} - x_{m-2})\ldots \ldots(t_{m-1} - t_1)\ldots(t_2 - t_1).$$

А определитель D равен значению производной

$$\frac{\partial^m T}{\partial t_1 \cdot \partial t_2 \ldots \partial t_m}$$

при

$$t_1 = x_1, \quad t_2 = x_2, \quad \ldots, \quad t_m = x_m.$$

Таким образом, мы без большого труда приходим к формуле

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} (x_m - x_{m-1})^4 (x_m - x_{m-2})^4 \ldots (x_2 - x_1)^4.$$

Далее, если мы расположим определитель T по степеням буквы t_i и коэффициент при t_i^l обозначим через

$$(-1)^{i+l+1} T_{i,\,l},$$

то определитель $D_{i,l}$ будет, конечно, равен значению производной

$$\frac{\partial^{m-1} T_{i,l}}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_{i-1} \partial t_{i+1} \ldots \partial t_m}$$

при

$$t_1 = x_1, \ t_2 = x_2, \ \ldots, \ t_{i-1} = x_{i-1}, \\ t_{i+1} = x_{i+1}, \ \ldots, \ t_m = x_m.$$

А отношение

$$\frac{(-1)^{l+1} T_{i,l}}{T_{i,2m-1}}$$

совпадает с коэффициентом при t_i^l в разложении по степеням t_i произведения

$$(t_i - t_1)(t_i - t_2) \ldots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \ldots \\ \ldots (t_i - t_m)(t_i - x_1) \ldots (t_i - x_m).$$

Поэтому

$$(-1)^{l+1} D_{i,l}$$

равняется произведению коэффициента при t_i^l в выражении

$$(t_i - x_1)(t_i - x_2) \ldots (t_i - x_{i-1})(t_i - x_{i+1}) \ldots \\ \ldots (t_i - x_m)(t_i - x_1)(t_i - x_2) \ldots (t_i - x_i) \ldots (t_i - x_m)$$

на значение производной

$$\frac{\partial^{m-1} T_{i,2m-1}}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_{i-1} \partial t_{i+1} \ldots \partial t_m}$$

при

$$t_1 = x_1, \ t_2 = x_2, \ \ldots, \ t_{i-1} = x_{i-1}, \\ t_{i+1} = x_{i+1}, \ \ldots, \ t_m = x_m.$$

С другой стороны,

$$T_{i,2m-1}$$

можно представить в виде произведения разностей чисел $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$:

$$T_{i,2m-1} = (x_m - x_{m-1}) \ldots (x_m - t_{i+1})(x_m - t_{i-1}) \ldots \\ \ldots (t_{i+1} - t_{i-1}) \ldots (t_3 - t_2)(t_2 - t_1).$$

Сопоставляя этот результат с предыдущими, приходим к такой формуле:

$$(-1)^{l+1}D_{i,\,l}=(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+i}(x_m-x_{m-1})^4(x_m-x_{m-2})^4\dots$$
$$\dots(x_2-x_1)^4\frac{C_{i,\,l}}{\{\psi'_m(x_i)\}^2},$$

где $C_{i,\,l}$ означает коэффициент при x^l в разложении по степеням буквы x произведения

$$P^2_{m,\,m}(x-x_1)^2\dots(x-x_{i-1})^2(x-x_i)(x-x_{i+1})^2\dots(x-x_m)^2,$$

равного

$$\frac{\psi_m(x)\,\psi_m(x)}{x-x_i}.$$

Итак,

$$(-1)^{l+i+1}D_{i,\,l}=D\frac{C_{i,\,l}}{\{\psi'_m(x_i)\}^2}$$

и

$$R_i\frac{\partial x_i}{\partial S_l}=(-1)^{l+i+1}\frac{D_{i,\,l}}{D}=\frac{C_{i,\,l}}{\{\psi'_m(x_i)\}^2}.$$

Предположим теперь, что как определители

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_m=\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1}\\ S_1 & S_2 & \dots & S_m\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ S_{m-1} & S_m & \dots & S_{2m-2}\end{vmatrix},$$

так и определители

$$\Delta^{(1)}=S_1,\ \Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} S_1 & S_2\\ S_2 & S_3\end{vmatrix},\ \dots,$$

$$\Delta^{(m)}=\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_m\\ S_2 & S_3 & \dots & S_{m+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ S_m & S_{m+1} & \dots & S_{2m-1}\end{vmatrix}$$

имеют положительные значения.

В таком случае все числа

$$x_i, \ R_i \ \text{и} \ (-1)^{l+1}C_{i,\,l}$$

также больше нуля и потому

$$(-1)^{l+1}\frac{\partial x_i}{\partial S_l} = \frac{(-1)^{l+1}C_{i,\,l}}{R_i\left\{\psi_m'(x_i)\right\}^2} > 0.$$

Отсюда вытекает следующая теорема:

Пока определители

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_m; \ \Delta^{(1)}, \ \Delta^{(2)}, \ \ldots, \ \Delta^{(m)}$$

сохраняют положительные значения, корни уравнения

$$\psi_m(x) = 0$$

возрастают при возрастании

$$S_1, \ S_3, \ \ldots, \ S_{2m-1}$$

и убывании

$$S_0, \ S_2, \ \ldots, \ S_{2m-2}.$$

Подобное же предложение относится и к самим определителям

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_m; \ \Delta^{(1)}, \ \Delta^{(2)}, \ \ldots, \ \Delta^{(m)}.$$

Именно, *при возрастании*

$$S_1, \ S_3, \ \ldots, \ S_{2m-1}$$

и убывании

$$S_0, \ S_2, \ \ldots, \ S_{2m-2}$$

определители

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_m$$

убывают, а определители

$$\Delta^{(1)}, \ \Delta^{(2)}, \ \ldots, \ \Delta^{(m)}$$

возрастают, пока все эти определители остаются положительными.

Для доказательства заметим, что

$$(-1)^l \frac{\partial \Delta_m}{\partial S_l} \quad \text{и} \quad (-1)^{l+1} \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial S_l}$$

выражаются суммами определителей, которые получаются соответственно из

$$\Delta_m \quad \text{и} \quad \Delta^{(m)}$$

посредством вычёркивания одного столбца и одной строки; это вычёркивание надо делать так, чтобы параметр S_l приходился на пересечении вычеркнутых столбца и строки.

А все такие определители, как мы сейчас покажем, числа положительные, если только

$$\Delta_1 > 0, \ \ldots, \ \Delta_m > 0; \quad \Delta^{(1)} > 0, \ \ldots, \Delta^{(m)} > 0.$$

В самом деле, подразумевая под Ω какой-нибудь из этих определителей и вводя прежние числа R_i и x_i, мы можем положить

$$\Omega = \begin{vmatrix} \sum R_i x_i^{\alpha_1+\beta_1} & \sum R_i x_i^{\alpha_1+\beta_2} & \ldots & \sum R_i x_i^{\alpha_1+\beta_{m-1}} \\ \sum R_i x_i^{\alpha_2+\beta_1} & \sum R_i x_i^{\alpha_2+\beta_2} & \ldots & \sum R_i x_i^{\alpha_2+\beta_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum R_i x_i^{\alpha_{m-1}+\beta_1} & \sum R_i x_i^{\alpha_{m-1}+\beta_2} & \ldots & \sum R_i x_i^{\alpha_{m-1}+\beta_{m-1}} \end{vmatrix},$$

причём целые числа

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_{m-1}, \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_{m-1}$$

ограничены неравенствами

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{m-1} \leqslant m,$$

$$0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{m-1} \leqslant m,$$

$$\alpha_{m-1} - \alpha_1 \leqslant m - 1, \quad \beta_{m-1} - \beta_1 \leqslant m - 1.$$

Затем, в силу теоремы об умножении определителей, можно разбить Ω на m слагаемых, каждое из которых равно произведению двух определителей:

$$\Omega = R_1 R_2 \ldots R_{m-1} \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \ldots & x_1^{\alpha_{m-1}} \\ x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & \ldots & x_2^{\alpha_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m-1}^{\alpha_1} & x_{m-1}^{\alpha_2} & \ldots & x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x_1^{\beta_1} & x_1^{\beta_2} & \ldots & x_1^{\beta_{m-1}} \\ x_2^{\beta_1} & x_2^{\beta_2} & \ldots & x_2^{\beta_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m-1}^{\beta_1} & x_{m-1}^{\beta_2} & \ldots & x_{m-1}^{\beta_{m-1}} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + R_2 R_3 \ldots R_m \begin{vmatrix} x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & \ldots & x_2^{\alpha_{m-1}} \\ x_3^{\alpha_1} & x_3^{\alpha_2} & \ldots & x_3^{\alpha_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^{\alpha_1} & x_m^{\alpha_2} & \ldots & x_m^{\alpha_{m-1}} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x_2^{\beta_1} & x_2^{\beta_2} & \ldots & x_2^{\beta_{m-1}} \\ x_3^{\beta_1} & x_3^{\beta_2} & \ldots & x_3^{\beta_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^{\beta_1} & x_m^{\beta_2} & \ldots & x_m^{\beta_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, если для каких-нибудь чисел

$$t_1, \; t_2, \; \ldots, \; t_{m-1}$$

и для целых чисел

$$\lambda_1, \; \lambda_2, \; \ldots, \; \lambda_{m-1},$$

удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{m-1} \leqslant m,$$

$$\lambda_{m-1} - \lambda_1 \leqslant m - 1,$$

мы составим определитель

$$\begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} & \ldots & t_1^{\lambda_{m-1}} \\ t_2^{\lambda_1} & t_2^{\lambda_2} & \ldots & t_2^{\lambda_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{m-1}^{\lambda_1} & t_{m-1}^{\lambda_2} & \ldots & t_{m-1}^{\lambda_{m-1}} \end{vmatrix},$$

то отношение его к произведению

$$(t_1 t_2 \ldots t_{m-1})^{\lambda_1} (t_{m-1} - t_{m-2})(t_{m-1} - t_{m-3}) \ldots$$
$$\ldots (t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)$$

будет наверно равно одному из следующих выражений:

$$1,\ t_1 + t_2 + \ldots + t_{m-1},\ t_1 t_2 + t_1 t_3 + \ldots + t_{m-2} t_{m-1}, \ldots,$$
$$t_1 t_2 \ldots t_{m-2} + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_{m-1}.$$

И можно прибавить, что это отношение

равно 1 при $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m-1} - \lambda_{m-2} = 1$,
равно $t_1 + t_2 + \ldots + t_{m-1}$ при $\lambda_{m-1} - \lambda_{m-2} = 2$,
равно $t_1 t_2 + \ldots + t_{m-2} t_{m-1}$ при $\lambda_{m-2} - \lambda_{m-3} = 2$,
. . . .
равно $t_1 t_2 \ldots t_{m-2} + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_{m-1}$ при $\lambda_2 - \lambda_1 = 2$.

Во всяком случае это отношение оказывается числом положительным, если $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ — числа положительные.

Следовательно, при положительных значениях

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{m-1}$$

произведение двух определителей рассматриваемого нами вида

$$\begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} & \ldots & t_1^{\lambda_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{m-1}^{\lambda_1} & t_{m-1}^{\lambda_2} & \ldots & t_{m-1}^{\lambda_{m-1}} \end{vmatrix},$$

отличающихся друг от друга только значениями показателей

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_{m-1},$$

наверно число положительное.

На этом основании мы можем утверждать, что все слагаемые, на которые мы разбили определитель Ω, числа положительные, если

$$x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ \ldots, \ x_m > 0,$$
$$R_1 > 0, \ R_2 > 0, \ \ldots, \ R_m > 0.$$

А это последнее условие наверно выполнено, если

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \ldots, \ \Delta_m > 0,$$
$$\Delta^{(1)} > 0, \Delta^{(2)} > 0, \ \ldots, \Delta^{(m)} > 0.$$

Итак, при

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \ldots, \ \Delta_m > 0,$$
$$\Delta^{(1)} > 0, \Delta^{(2)} > 0, \ \ldots, \Delta^{(m)} > 0$$

все определители Ω — числа положительные, а вместе с ними должны быть положительными

$$(-1)^l \frac{\partial \Delta_m}{\partial S_l} \quad \text{и} \quad (-1)^{l+1} \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial S_l}.$$

Мы говорили о Δ_m и $\Delta^{(m)}$, но нетрудно видеть, что условий

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \ldots, \ \Delta_m > 0,$$
$$\Delta^{(1)} > 0, \Delta^{(2)} > 0, \ \ldots, \Delta^{(m)} > 0$$

достаточно и для того, чтобы выражения

$$(-1)^l \frac{\partial \Delta_k}{\partial S_l} \quad \text{и} \quad (-1)^{l+1} \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial S_l}$$

были не меньше нуля при $k = 1, 2, \ldots, m$.

В этом и состоит предложение, высказанное нами на странице 91-й.

Основываясь на предыдущем, нетрудно уже доказать две замечательные теоремы, которыми мы закончим нашу статью.

Одна касается определителей

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_m,\ \Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)},\ \ldots,\ \Delta^{(m)},$$

а другая корней уравнения

$$\psi_m(x) = 0.$$

Теорема об определителях. *Если для чисел*

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-2},\ S_{2m-1}$$

мы имеем две системы значений:

$$\begin{aligned} 1)\ & S_0 = a_0,\ S_1 = a_1,\ S_2 = a_2,\ \ldots, \\ & S_{2m-2} = a_{2m-2},\ S_{2m-1} = a_{2m-1}, \\ 2)\ & S_0 = b_0,\ S_1 = b_1,\ S_2 = b_2,\ \ldots, \\ & S_{2m-2} = b_{2m-2},\ S_{2m-1} = b_{2m-1}, \end{aligned}$$

при которых все определители

$$\Delta_1 = S_0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-1} & S_m & \ldots & S_{2m-2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^{(1)} = S_1,\ \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\Delta^{(m)} = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_m \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & S_{m+1} & \ldots & S_{2m-1} \end{vmatrix}$$

оказываются числами положительными и удовлетворены неравенства

$$\begin{aligned} & a_0 \geqslant b_0,\ b_1 \geqslant a_1,\ a_2 \geqslant b_2,\ b_3 \geqslant a_3,\ \ldots, \\ & a_{2m-2} \geqslant b_{2m-2},\ b_{2m-1} \geqslant a_{2m-1}, \end{aligned}$$

то наши определители

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_m;\ \Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)},\ \ldots,\ \Delta^{(m)}$$

должны оставаться числами положительными при всех значениях

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-1},$$

удовлетворяющих неравенствам

$$a_0 \geqslant S_0 \geqslant b_0,\ b_1 \geqslant S_1 \geqslant a_1,\ a_2 \geqslant S_2 \geqslant b_2,\ \ldots,$$
$$a_{2m-2} \geqslant S_{2m-2} \geqslant b_{2m-2},\ b_{2m-1} \geqslant S_{2m-1} \geqslant a_{2m-1}.$$

При тех же условиях должно быть

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{2k-2} \end{vmatrix} \geqslant$$
$$\geqslant \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{k-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{k-1} & S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-2} \end{vmatrix} \geqslant$$
$$\geqslant \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{k-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k-1} & b_k & b_{k+1} & \ldots & b_{2k-2} \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_k \\ b_2 & b_3 & \ldots & b_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_k & b_{k+1} & \ldots & b_{2k-1} \end{vmatrix} \geqslant \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_k \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-1} \end{vmatrix} \geqslant$$
$$\geqslant \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{2k-1} \end{vmatrix}$$

при $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$.

Доказательство. При $m=1$ наша теорема очевидна.

Поэтому, желая доказать её для какого-нибудь значения m, мы можем допускать, что она справедлива при меньших значениях m.

Другими словами, можно считать нашу теорему вполне доказанной, если мы докажем неравенства

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_k & \dots & a_{2k-2} \end{vmatrix} \geqslant \Delta_k \geqslant \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1} & b_k & \dots & b_{2k-2} \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_k & b_{k+1} & \dots & b_{2k-1} \end{vmatrix} \geqslant \Delta^{(k)} \geqslant \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & \dots & a_{2k-1} \end{vmatrix}$$

для $k=m$, приняв их для $k=1, 2, 3, \dots, m-1$ за несомненные.

Далее заметим, что определители

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m; \ \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(m-1)}$$

не зависят от S_{2m-1}.

Поэтому при доказательстве неравенств

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1} & a_m & \dots & a_{2m-2} \end{vmatrix} \geqslant \Delta_m \geqslant \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m-1} & b_m & \dots & b_{2m-2} \end{vmatrix}$$

мы можем давать S_{2m-1} произвольные значения, вовсе не стесняясь неравенствами

$$b_{2m-1} \geqslant S_{2m-1} \geqslant a_{2m-1}.$$

После всех этих замечаний станем непрерывно увеличивать

$$S_0,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-2}$$

и уменьшать

$$S_1,\ S_3,\ \ldots,\ S_{2m-3},$$

исходя из значений

$$S_0=b_0,\ S_1=b_1,\ S_2=b_2,\ \ldots,\quad S_{2m-3}=b_{2m-3},\ S_{2m-2}=b_{2m-2}$$

и заканчивая значениями

$$S_0=a_0,\ S_1=a_1,\ S_2=a_2,\ \ldots,\quad S_{2m-3}=a_{2m-3},\ S_{2m-2}=a_{2m-2}.$$

Очевидно, что мы можем пройти таким образом через любую систему значений

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-3},\ S_{2m-2},$$

которые удовлетворяют неравенствам

$$a_0\geqslant S_0\geqslant b_0,\quad b_1\geqslant S_1\geqslant a_1,\ \ldots,\quad b_{2m-3}\geqslant S_{2m-3}\geqslant a_{2m-3},\ a_{2m-2}\geqslant S_{2m-2}\geqslant b_{2m-2}.$$

Допустим неравенства

$$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \ldots,\ \Delta_{m-1}>0;$$
$$\Delta^{(1)}>0,\ \Delta^{(2)}>0,\ \ldots,\ \Delta^{(m-2)}>0,$$

$$\Delta^{(m-1)}\geqslant\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1}\\ a_2 & a_3 & \ldots & a_m\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ a_{m-1} & a_m & \ldots & a_{2m-3}\end{vmatrix}$$

для всех рассматриваемых нами значений

$$S_0, S_1, \ldots, S_{2m-3}, S_{2m-2}.$$

Затем S_{2m-1} предположим столь большим, что определитель $\Delta^{(m)}$, равный

$$\Delta^{(m-1)} S_{2m-1} + \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_{m-1} & S_m \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_m & S_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-1} & S_m & \ldots & S_{2m-3} & S_{2m-2} \\ S_m & S_{m+1} & \ldots & S_{2m-2} & 0 \end{vmatrix},$$

оставался у нас постоянно положительным.

Это возможно ввиду неравенства

$$\Delta^{(m-1)} \geqslant \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1} & a_m & \ldots & a_{2m-3} \end{vmatrix}.$$

При таких условиях определитель Δ_m в силу ранее доказанного предложения должен постоянно возрастать при возрастании

$$S_0, S_2, S_4, \ldots, S_{2m-2}$$

и убывании

$$S_1, S_3, \ldots, S_{2m-3},$$

так как его начальное значение

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m-1} & b_m & \ldots & b_{2m-2} \end{vmatrix}$$

— число положительное.

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1} & a_m & \dots & a_{2m-2} \end{vmatrix} \geqslant \Delta_m \geqslant \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m-1} & b_m & \dots & b_{2m-2} \end{vmatrix}$$

для всех значений

$$S_0, \ S_1, \ S_2, \ \dots, \ S_{2m-2},$$

удовлетворяющих неравенствам

$$a_0 \geqslant S_0 \geqslant b_0, \ b_1 \geqslant S_1 \geqslant a_1, \ \dots, \ a_{2m-2} \geqslant S_{2m-2} \geqslant b_{2m-2},$$

если для тех же значений

$$S_0, \ S_1, \ S_2, \ \dots, \ S_{2m-2}$$

имеют место неравенства

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \dots, \ \Delta_{m-1} > 0;$$

$$\Delta^{(1)} > 0, \ \Delta^{(2)} > 0, \ \dots, \ \Delta^{(m-2)} > 0,$$

$$\Delta^{(m-1)} \geqslant \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1} & a_m & \dots & a_{2m-3} \end{vmatrix}.$$

Обращаясь к определителю $\Delta^{(m)}$, мы не можем уже давать S_{2m-1} произвольные значения.

Зато к прежним неравенствам

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \dots, \ \Delta_{m-1} > 0;$$

$$\Delta^{(1)} > 0, \ \Delta^{(2)} > 0, \ \dots, \ \Delta^{(m-1)} > 0$$

мы можем присоединить теперь неравенство

$$\Delta_m > 0.$$

А при таких условиях, если мы станем непрерывно уменьшать

$$S_0,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2m-2}$$

и увеличивать

$$S_1,\ S_3,\ \ldots,\ S_{2m-1},$$

исходя из значений

$$S_0 = a_0,\ S_1 = a_1,\ S_2 = a_2,\ \ldots,\ S_{2m-2} = a_{2m-2},\ S_{2m-1} = a_{2m-1}$$

и заканчивая значениями

$$S_0 = b_0,\ S_1 = b_1,\ S_2 = b_2,\ \ldots,\ S_{2m-2} = b_{2m-2},\ S_{2m-1} = b_{2m-1},$$

то в силу ранее доказанного предложения определитель $\Delta^{(m)}$ должен постоянно возрастать, так как его начальное значение

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{2m-1} \end{vmatrix}$$

— число положительное.

Следовательно, при нашем допущении имеем

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{2m-1} \end{vmatrix} \leqslant \Delta^{(m)} \leqslant \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ b_2 & b_3 & \ldots & b_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_m & b_{m+1} & \ldots & b_{2m-1} \end{vmatrix}$$

для всех рассматриваемых значений

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{2m-2}, S_{2m-1}.$$

Этих выводов достаточно для того, чтобы признать нашу теорему вполне доказанной.

Теорема о корнях. *Если числа*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2m-2}, a_{2m-1},$$
$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{2m-2}, S_{2m-1},$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{2m-2}, b_{2m-1}$$

удовлетворяют всем условиям предыдущей теоремы, то уравнения

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m & x \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{m+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{m-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_m & x \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{m+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & S_{m+1} & \ldots & S_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & 1 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_m & x \\ b_2 & b_3 & \ldots & b_{m+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_m & b_{m+1} & \ldots & b_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0$$

степени m относительно неизвестной x не имеют ни кратных, ни мнимых, ни отрицательных корней.

И корни второго уравнения больше соответственных корней первого и меньше соответственных корней последнего уравнения.

Соответственными корнями наших уравнений мы называем наибольшие корни, вторые по величине, третьи и т. д., наконец наименьшие.

Последняя теорема представляет простое следствие предыдущих, так как уравнение

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_m & x \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{m+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & S_{m+1} & \dots & S_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0$$

совпадает с уравнением

$$\psi_m(x) = 0.$$

В заключение заметим, что один важный частный случай *теоремы о корнях* находится в недавно появившейся работе акад. П. Л. Чебышева «О разложении в непрерывную дробь рядов, расположенных по нисходящим степеням переменной».

Знаменитый учёный выводит также и формулу, равносильную нашей

$$(-1)^{l+1} R_i \frac{\partial x_i}{\partial S_l} = \frac{(-1)^{l+1} C_{i,l}}{\{\psi_m(x_i)\}^2}.$$

По методам работа акад. П. Л. Чебышева существенно отличается от моей.

Из других работ, которые имеют нечто общее с моей, упомяну статью Joachimstahl «Bemerkungen über den Sturmschen Satz», помещённую в 48-м томе журнала Journal für die reine und angewandte Mathematik, и статью Frobenius «Ueber Relationen zwischen Näherungsbrüchen von Potenzreihen», помещённую в 90-м томе того же журнала.

Из своих работ упомяну две заметки «Sur les racines des certaines équations» *), публикованные в XXVII-м томе журнала Mathematische Annalen, и диссертацию «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей».

Моя диссертация, появившаяся в 1884 г., содержит, между прочим, вывод тех формул, которые публикованы акад. П. Л. Чебышевым в 1885 г. без доказательства в записке «О представлении предельных величин интегралов посредством интегральных вычетов».

---

*) См. статьи «О корнях некоторых уравнений» в настоящем сборнике. (*Прим. ред.*)

7. ДВА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Рассматривая известное разложение интеграла

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

в непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cfrac{1}{\alpha_3 z+\beta_3-\ddots}}},$$

предположим, что пределы a и b, а также все значения переменной интегрирования y и $\sqrt{f(y)}$ — действительные числа.

Сейчас мы очень просто покажем, что при этих условиях

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy=\lim_{n\to\infty}\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ddots-\cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

для всех значений z, не лежащих на пути интегрирования.

Напомним*) для этой цели, что выражение

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}$$

приводится к дроби

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)},$$

знаменатель которой $\varphi_n(z)$ есть полином степени n, удовлетворяющий условиям

$$0 = \int_a^b \varphi_n(y) f(y)\,dy = \int_a^b y\,\varphi_n(y) f(y)\,dy = \ldots$$

$$\ldots = \int_a^b y^{n-1}\varphi_n(y) f(y)\,dy,$$

и числитель $\psi_n(z)$ определяется по формуле

$$\psi_n(z) = \int_a^b \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(y)}{z - y} f(y)\,dy.$$

Известно также, что корни уравнения

$$\varphi_n(z) = 0$$

не могут быть кратными или комплексными и что все эти корни

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

содержатся между a и b.

*) К. Поссе, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, 1886.

Отсюда следует, что для всякого многочлена $\Omega(y)$ степени меньше чем $2n$ мы имеем соотношение

$$\int_a^b \Omega(y) f(y)\,dy = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \Omega(y_i);$$

в частности,

$$\int_a^b f(y)\,dy = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}$$

и

$$\frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} = \int_a^b \left\{\frac{\varphi_n(y)}{(y-y_i)\,\varphi_n'(y_i)}\right\}^2 f(y)\,dy > 0.$$

С другой стороны, очевидное равенство

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \frac{1}{z-y_i}$$

нам даёт

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \frac{1}{z-y_i}$$

и, следовательно,

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \left\{\frac{1}{z-y} - \Omega(y)\right\} f(y)\,dy -$$

$$- \sum \left\{\frac{1}{z-y_i} - \Omega(y_i)\right\} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)},$$

каков бы ни был полином $\Omega(y)$ степени меньше чем $2n$.

После этих замечаний возьмём какое-нибудь число x, удовлетворяющее неравенству

$$\left|\frac{y-x}{z-x}\right| < 1$$

на всём пути интегрирования, и положим

$$\Omega(y) = \frac{1}{z-x} + \frac{y-x}{(z-x)^2} + \frac{(y-x)^2}{(z-x)^3} + \ldots + \frac{(y-x)^{2n-1}}{(z-x)^{2n}}.$$

Тогда разность

$$\frac{1}{z-y} - \Omega(y)$$

сведётся к

$$\frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}},$$

и следовательно, мы будем иметь:

$$\int_a^b \frac{f(y)dy}{z-y} - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}} f(y)\,dy -$$

$$- \sum \frac{(y_i-x)^{2n}}{(z-y_i)(z-x)^{2n}} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}.$$

Что касается выражений

$$\int_a^b \frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}} f(y)\,dy \quad \text{и} \quad \sum \frac{(y_i-x)^{2n}}{(z-y_i)(z-x)^{2n}} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)},$$

то их модули меньше, чем произведение интеграла

$$\int_a^b f(y)\,dy$$

на максимум модуля выражения

$$\frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}}$$

на пути интегрирования.

Но так как x — величина постоянная, то этот максимум при достаточно больших значениях n будет сколь угодно мал.

Следовательно, когда n неограниченно возрастает, разность

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$$

стремится к нулю. Предыдущие рассуждения позволяют также получить верхний предел для модуля разности

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2 - \cfrac{\ddots}{- \cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}}.$$

Для этого важно выбрать число x таким образом, чтобы максимум

$$\left|\frac{y-x}{z-x}\right|$$

был возможно мал.

Сообразно с этим условием положим

$$x=\frac{a+b}{2},$$

если z — действительное число, и

$$x=\frac{a+b}{2}-dti,$$

если z — комплексное число:

$$z=c+di;$$

при этом за t мы берём положительный корень уравнения

$$t^2+\frac{d^2+(c-a)(c-b)}{d^2}\,t-\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2=0.$$

При выбранном нами значении x мы найдём, что модуль разности

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

меньше, чем

$$\frac{2}{\sqrt{(c-a)^2+d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n \int_a^b f(y)\,dy,$$

или

$$\frac{2}{\sqrt{(c-b)^2+d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n \int_a^b f(y)\,dy,$$

или

$$\frac{2}{\sqrt{d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n \int_a^b f(y)\,dy$$

для

$$z=c+di,$$

и меньше, чем

$$\frac{1}{a-z}\left(\frac{b-a}{2z-a-b}\right)^{2n} \int_a^b f(y)\,dy$$

или

$$\frac{1}{z-b}\left(\frac{b-a}{2z-a-b}\right)^{2n} \int_a^b f(y)\,dy$$

для действительных значений z, удовлетворяющих условию

$$(z-a)(z-b)>0.$$

Относительно этих результатов заметим, что для действительных значений z другой подсчёт даёт для того же модуля в качестве верхней грани произведение выражения

$$\frac{4(b-a)^{2n}\int\limits_a^b f(y)\,dy}{\{2z-a-b+2\sqrt{(z-a)(z-b)}\}^{2n}+\{2z-a-b-2\sqrt{(z-a)(z-b)}\}^{2n}}$$

на $\frac{1}{a-z}$ или $\frac{1}{z-b}$.

Предыдущее доказательство предполагает, что пределы a и b конечные.

Сейчас мы дадим для действительных значений z другое доказательство, которое распространяется на многие случаи, когда

$$a=-\infty \quad \text{или} \quad b=+\infty.$$

Пусть, для определённости,

$$a<y_1<y_2<\ldots<y_{n-1}<y_n<b<z.$$

Полагая

$$\Omega_0(y)=\frac{\varphi_n^2(z)-\varphi_n^2(y)}{(z-y)\,\varphi_n^2(z)}$$

и

$$\Omega_1(y)=\frac{(y-y_n)\,\varphi_n^2(z)-(z-y_n)\,\varphi_n^2(y)}{(z-y)(y-y_n)\,\varphi_n^2(z)},$$

мы будем иметь

$$\int\limits_a^b \Omega_0(y)\,f(y)\,dy=\int\limits_a^b \Omega_1(y)f(y)\,dy=\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)},$$

$$\Omega_0(y)\leqslant\frac{1}{z-y} \quad \text{для} \quad a\leqslant y\leqslant b,$$

$$\Omega_1(y)\geqslant\frac{1}{z-y} \quad \text{для} \quad a\leqslant y\leqslant y_n,$$

$$\Omega_1(y)\geqslant\frac{1}{z-y}-\frac{(z-y_n)\,\varphi_n^2(b)}{(z-y)(b-y_n)\,\varphi_n^2(z)} \quad \text{для} \quad y_n<y\leqslant b$$

и, следовательно,

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy > \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} >$$

$$> \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{(z-y_n)\,\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\,\varphi_n^2(z)} \int_{y_n}^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy.$$

Первого из этих неравенств достаточно, чтобы установить сходимость наших непрерывных дробей, если принять во внимание неравенство

$$\frac{\psi_{n+1}(z)}{\varphi_{n+1}(z)} > \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}.$$

Что касается формулы

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - }}},$$

то она вытекает немедленно из наших неравенств во всех случаях, когда можно доказать, что одна или обе из величин

$$\frac{(z-y_n)\,\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\,\varphi_n^2(z)} \quad \text{и} \quad \int_{y_n}^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Когда a конечно, то здесь нет затруднений, так как

$$\frac{(z-y_n)\,\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\,\varphi_n^2(z)} < \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^{2n-1}.$$

Переходя к случаю, когда

$$a = -\infty,$$

положим

$$b = 0, \quad f(y) = e^y(-y)^\lambda g(y),$$

где λ — постоянная, удовлетворяющая условию $\lambda+1>0$, и $g'(y)>0$ для $-\infty<y<0$. Тогда, применяя к функции

$$V(y, \xi)=e^{y}(-y)^{\lambda}\{g(y)\}^{\xi}$$

первую теорему моей второй статьи *) «О корнях некоторых уравнений», мы найдём, что корни

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

уравнения

$$\varphi_n(y)=0$$

больше ($\xi=1$), чем соответствующие корни ($\xi=0$)

$$y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$$

уравнения

$$e^{-y}y^{-\lambda}\frac{d^n}{dy^n}\{e^{y}y^{\lambda+n}\}=0.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае значения

$$\int_{y_n}^{b}\frac{f(y)}{z-y}\,dy \quad \text{и} \quad \frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)}$$

соответственно меньше, чем $\int\limits_{y_n^0}^{b}\frac{f(y)}{z-y}\,dy$ и

$\left(\frac{-y_1^0}{z-y_1^0}\right)^2\cdots\left(\frac{-y_{n-1}^0}{z-y_{n-1}^0}\right)^2\left(\frac{-y_n^0}{z-y_n^0}\right)$. Но последнее выражение, равное

$$\left(1-\frac{z}{y_n^0}\right)\left\{1+\frac{n}{\lambda+1}z+\frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{z^2}{1\cdot 2}+\ldots\right\}^{-2},$$

*) А. Марков, О корнях некоторых уравнений (на франц. языке), Math. Annalen, Bd. 27 (см. перевод этой статьи в настоящем сборнике. — *Прим. ред.*).

меньше, чем выражение

$$\left\{1+\frac{n}{\lambda+1}z+\frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{z^2}{1\cdot 2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\right\}^{-1},$$

которое стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y}\,dy$$

разлагается в непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cfrac{1}{\alpha_3 z+\beta_3-\ddots}}}\,,$$

сходящуюся для всех действительных положительных значений z, если $g(y)>0$ и если интегралы

$$\int_{-\infty}^{0}e^y(-y)^\lambda g(y)\,dy,\quad \int_{-\infty}^{0}e^y(-y)^{\lambda+1}g(y)\,dy,\ \ldots$$

имеют смысл. И мы можем быть уверенными, что эта непрерывная дробь сходится к рассмотренному интегралу по крайней мере в тех случаях, когда

$$\lambda+1>0\quad\text{и}\quad g'(y)>0\quad\text{для}\quad -\infty<y\leqslant 0;$$

в этих случаях разность

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y}\,dy-\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ddots-\cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

меньше, чем

$$\frac{\left(1-\frac{z}{y_n^0}\right)\int\limits_{y_n^0}^{0}\frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y}\,dy}{\left\{1+\frac{n}{\lambda+1}z+\frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{z^2}{1\cdot 2}+\ldots\right\}^2},$$

где $-y_n^0$ — наименьший корень уравнения

$$1-\frac{n}{\lambda+1}z+\frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{z^2}{1\cdot 2}-\ldots=0.$$

Можно пойти дальше, доказавши следующую важную и простую теорему:

Теорема. *Если две действительные функции*

$$f^0(y) \text{ и } f(y)$$

действительного переменного y удовлетворяют неравенствам

$$f^0(y)>f(y)>0$$

для всех значений y, заключённых между a и b, то, разлагая интегралы

$$\int\limits_a^b \frac{f^0(y)}{z-y}\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

в непрерывные дроби

$$\cfrac{1}{\alpha_1^0 z+\beta_1^0-\cfrac{1}{\alpha_2^0 z+\beta_2^0-\cfrac{1}{\alpha_3^0 z+\beta_3^0-\ddots}}}$$

и

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ddots}}},$$

мы будем иметь

$$\int_a^b \frac{f^0(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1^0 z + \beta_1^0 - \cfrac{1}{\alpha_2^0 z + \beta_2^0 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n^0 z + \beta_n^0}}} >$$

$$> \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}$$

для $z > b$ (*в случае, когда* $z < a$, ***нужно изменить*** *знак* $>$ *на* $<$).

Чтобы доказать эту теорему, положим

$$V(y, \xi) = f^0(y) + \xi\,[f(y) - f^0(y)]$$

и рассмотрим дробь

$$\frac{\psi_n(z, \xi)}{\varphi_n(z, \xi)},$$

знаменатель которой $\varphi_n(z, \xi)$ есть полином степени n относительно z, удовлетворяющий уравнениям

$$0 = \int_a^b \varphi_n(y, \xi)\, V(y, \xi)\,dy = \int_a^b y\,\varphi_n(y, \xi)\, V(y, \xi)\,dy = \ldots$$

$$\ldots = \int_a^b y^{n-1}\varphi_n(y, \xi)\, V(y, \xi)\,dy,$$

и числитель $\psi_n(z, \xi)$ определяется по формуле

$$\psi_n(z, \xi) = \int_a^b \frac{\varphi_n(z, \xi) - \varphi_n(y, \xi)}{z - y} V(y, \xi)\, dy.$$

Положив это, мы можем записать доказываемое неравенство в виде

$$\int_a^b \frac{V(y, 0)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, 0)}{\varphi_n(z, 0)} > \int_a^b \frac{V(y, 1)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, 1)}{\varphi_n(z, 1)}.$$

Но

$$\int_a^b \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, \xi)}{\varphi_n(z, \xi)} = \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy$$

и

$$\frac{d}{d\xi} \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy =$$

$$= 2 \int_a^b V(y, \xi) \frac{\varphi_n(y, \xi)}{\varphi_n^3(z, \xi)} \frac{\varphi_n(z, \xi) \dfrac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \varphi_n(y, \xi) \dfrac{\partial \varphi_n(z, \xi)}{\partial \xi}}{z - y} dy +$$

$$+ \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{\dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}}{z - y} dy =$$

$$= \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{f(y) - f^0(y)}{z - y} dy < 0,$$

откуда непосредственно следует наше неравенство.

Останавливаясь на случае, когда

$$a = -\infty, \quad b = 0, \quad f^0(y) = e^y (-y)^\lambda,$$
$$f(y) = e^y (-y)^\lambda g(y), \quad \lambda + 1 > 0, \quad z > 0$$
$$\text{и } 0 < g(y) < 1 \text{ для } -\infty < y \leqslant 0,$$

сообразуются с предыдущими замечаниями о знаках величин δ. Соответствующее приращение интеграла

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

равно

$$\sigma(\delta_1\xi_1^i + \delta_2\xi_2^i + \ldots + \delta_{i+1}\xi_{i+1}^i) =$$

$$= \sigma\varepsilon\left\{\frac{\xi_1^i}{\theta'(\xi_1)} + \ldots + \frac{\xi_{i+1}^i}{\theta'(\xi_{i+1})}\right\} = \sigma\varepsilon$$

и, следовательно, имеет тот же знак, что ε.

Из всего этого можно сделать следующие заключения:

I. Интеграл

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

не достигает ни одного из своих экстремальных значений, если в какой-либо части интервала (a, b) функция $f(y)$ не достигает ни одного из своих крайних значений 0 и L.

II. Интеграл

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

не достигает своего максимума, если между a и b можно указать, в порядке возрастания y, $i+1$ интервал, где функция $f(y)$ равна попеременно 0 и L, причём

$$f(y) = 0$$

в последнем из этих интервалов.

III. Интеграл

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

не достигает своего минимума, если между a и b можно указать, в порядке возрастания y, $i+1$ интервал, где функция попеременно равна 0 и L, причём

$$f(y)=L$$

в последнем из этих интервалов.

Следовательно, *экстремальные значения интеграла*

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

соответствуют таким функциям $f(y)$, *для которых интервал* (a, b) *делится на* $i+1$ *частей, в которых* $f(y)$ *попеременно равна* 0 *и* L, *если только подобное разбиение на меньшее число частей невозможно.*

В последнем из этих интервалов нужно, чтобы $f(y)=L$ *для максимума и* $f(y)=0$ — *для минимума интеграла*

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy.$$

§ 2. Предположим теперь, что значениями $f(y)$ интервал (a, b) делится ровно на $i+1$ частей таких, что

$$f(y)=\frac{1+(-1)^i}{2}L \text{ или } \frac{1-(-1)^i}{2}L \text{ для } a<y<y_1,$$

$$f(y)=\frac{1+(-1)^{i-1}}{2}L \text{ » } \frac{1-(-1)^{i-1}}{2}L \text{ » } y_1<y<y_2,$$

. . . .

$$f(y)=0 \text{ или } L \text{ для } y_{i-1}<y<y_i,$$

$$f(y)=L \text{ » } 0 \text{ » } y_i<y<b.$$

Пусть $F(y)$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая условиям (1) и (2):

$$\int_a^b F(y)\,dy=\alpha_0,\ \int_a^b yF(y)\,dy=\alpha_1,\ldots,\int_a^b y^{i-1}F(y)\,dy=\alpha_{i-1},$$

$$L\geqslant F(y)\geqslant 0.$$

Тогда

$$\int_a^b \Omega(y) f(y)\, dy = \int_a^b \Omega(y)\, F(y)\, dy$$

для всякого полинома $\Omega(y)$ степени меньше чем i. Но разность

$$y^i - (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i)$$

есть полином относительно y степени меньше чем i. Следовательно, разность

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy - \int_a^b y^i F(y)\, dy$$

равна

$$\int_a^b (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i) f(y)\, dy -$$

$$- \int_a^b (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i) F(y)\, dy,$$

т. е. равна интегралу

$$\int_a^b (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i)\{f(y) - F(y)\}\, dy,$$

все элементы которого $\geqslant 0$ или $\leqslant 0$, в зависимости от того, будет ли

$$f(y) = L \quad \text{или} \quad 0 \quad \text{для} \quad y_i < y < b.$$

Следовательно, разность

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy - \int_a^b y^i F(y)\, dy$$

при $f(y) \not\equiv F(y)$ наверно положительна, если

$$f(y) = L \quad \text{для} \quad y_i < y < b,$$

и отрицательна, если

$$f(y) = 0 \quad \text{для} \quad y_i < y < b.$$

Таким образом, мы подтверждаем правильность нашего решения и доказываем его единственность, исключая только случай, когда единственными значениями 0 и L некоторой функции $f(y)$, удовлетворяющей условиям (1) и (2), весь интервал (a, b) разбивается на число частей, меньшее чем $i+1$.

Но легко убедиться, что эти исключительные случаи невозможны, если числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ задаются равенствами

$$\alpha_0 = \int_a^b F(y)\,dy, \quad \alpha_1 = \int_a^b yF(y)\,dy, \quad \ldots,$$

$$\alpha_{i-1} = \int_a^b y^{i-1}F(y)\,dy, \tag{3}$$

где $F(y)$ — заданная функция, значения которой удовлетворяют условию

$$L \geqslant F(y) \geqslant 0 \quad (\text{для } a \leqslant y \leqslant b)$$

и не все равны 0 и L.

§ 3. Обозначим через

$$f_{\min} \quad \text{и} \quad f_{\max}$$

функции $f(y)$, удовлетворяющие нашим условиям и соответствующие минимуму и максимуму интеграла

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy.$$

Пусть ещё

$$\xi', \ \xi'', \ \eta', \ \eta''$$

— те значения y, для которых функции $f_{\min}$ и $f_{\max}$ меняют свои значения 0 и L так, что

$$
\begin{aligned}
&f_{\min}=0 \ \text{для}\ y=\xi'-\varepsilon, && f_{\min}=L \ \text{для}\ y=\xi'+\varepsilon,\\
&f_{\max}=0 \quad \text{»} \quad y=\xi''-\varepsilon, && f_{\max}=L \quad \text{»} \quad y=\xi''+\varepsilon,\\
&f_{\min}=L \quad \text{»} \quad y=\eta'-\varepsilon, && f_{\min}=0 \quad \text{»} \quad y=\eta'+\varepsilon,\\
&f_{\max}=L \quad \text{»} \quad y=\eta''-\varepsilon, && f_{\max}=0 \quad \text{»} \quad y=\eta''+\varepsilon,
\end{aligned}
$$

где ε — бесконечно малая положительная величина.

Наконец, обозначим через

$V_i^{(')}(z)$ произведение всех множителей $z-\xi'$,

$V_i^{('')}(z)$ » » » $z-\xi''$,

$U_i^{(')}(z)$ » » » $z-\eta'$,

$U_i^{('')}(z)$ » » » $z-\eta''$.

После этих обозначений условие (1) для функций $f_{\min}$ и $f_{\max}$ сведётся к уравнениям

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum\eta'-\sum\xi'-\lambda a=\frac{\alpha_0}{L}=b+\sum\eta''-\sum\xi''-\mu a,\\
&\sum\eta'^2-\sum\xi'^2-\lambda a^2=\frac{2\alpha_1}{L}=b^2+\sum\eta''^2-\sum\xi''^2-\mu a^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum\eta'^i-\sum\xi'^i-\lambda a^i=\frac{i\alpha_{i-1}}{L}=b^i+\sum\eta''^i-\sum\xi''^i-\mu a^i,\\
&\qquad\lambda=\frac{1-(-1)^i}{2},\quad \mu=\frac{1+(-1)^i}{2}.
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

Что касается минимума и максимума интеграла

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy,$$

то они будут равны:

$$\left.\begin{aligned} h'_i &= \int_a^b y^i f_{\min} dy = L\left\{\sum \frac{\eta'^{i+1}}{i+1} - \sum \frac{\xi'^{i+1}}{i+1} - \frac{\lambda a^{i+1}}{i+1}\right\}, \\ h''_i &= \int_a^b y^i f_{\max} dy = L\left\{\frac{b^{i+1}-\mu a^{i+1}}{i+1} + \sum \frac{\eta''^{i+1}}{i+1} - \sum \frac{\xi''^{i+1}}{i+1}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

В случае чётного $l (=2n)$ мы имеем $4n$ неизвестных

$$\xi'_1 < \eta'_1 < \xi'_2 < \eta'_2 < \ldots < \xi'_n < \eta'_n,$$

$$\eta''_1 < \xi''_1 < \eta''_2 < \xi''_2 < \ldots < \eta''_n < \xi''_n$$

и мы можем заменить уравнения (4) формулами

$$\sum \frac{L}{z-\eta'} - \sum \frac{L}{z-\xi'} = \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{2\alpha_1}{z^3} + \ldots + \frac{2n\alpha_{2n-1}}{z^{2n+1}} + \frac{(2n+1)h'_{2n}}{z^{2n+2}} + \ldots,$$

$$\frac{L}{z-b} - \frac{L}{z-a} + \sum \frac{L}{z-\eta''} - \sum \frac{L}{z-\xi''} = \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{2\alpha_1}{z^3} + \ldots + \frac{2n\alpha_{2n-1}}{z^{2n+1}} + \frac{(2n+1)h''_{2n}}{z^{2n+2}} + \ldots,$$

откуда, интегрируя по z, получим

$$\frac{V_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)}{U_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}} + \frac{h'_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \ldots},$$

$$\frac{(z-a)V_{2n}^{(\mathrm{II})}(z)}{(z-b)U_{2n}^{(\mathrm{II})}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}} + \frac{h''_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \ldots}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)}{U_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)} &= e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y} + \frac{h'_{2n}-\alpha_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \ldots} \\ \frac{V_{2n}^{(\mathrm{II})}(z)}{U_{2n}^{(\mathrm{II})}(z)} &= \frac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)}{z-y}dy + \frac{h''_{2n}-\alpha_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \ldots}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

если определить все числа α с помощью равенств (3).

мы найдём, что разность между интегралом

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{y}(-y)^{\lambda} g(y)}{z-y}\, dy$$

и подходящей дробью

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ddots-\cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}},$$

соответствующей непрерывной дроби, не превосходит

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot\Gamma(\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)\,z}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{n}{\lambda+1}z+\frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{z^2}{1\cdot 2}+\ldots\right\}^{-2}.$$

8. НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

В рассуждении «О некоторых приложениях алгебраически непрерывных дробей» (1884 г.) я занимался нахождением предельных величин некоторых интегралов, зависящих от функции $f(y)$, подчинённой только следующим условиям:

1) $f(y) \geqslant 0$ для $a \leqslant y \leqslant b$;

2) интегралы

$$\int_a^b f(y)\,dy, \quad \int_a^b y f(y)\,dy, \ \ldots, \ \int_a^b y^{i-1} f(y)\,dy$$

должны иметь наперёд заданные значения.

Вопрос об этих предельных величинах был поднят Чебышевым в его заметке «Sur les valeurs limites des intégrales»*).

Чебышеву мы обязаны также важными неравенствами; доказанные и обобщённые мной **), они служат основанием для исследования подобного рода вопросов.

Теперь мы будем рассматривать вопросы, подобные прежним, заменяя только неравенство

$$f(y) \geqslant 0$$

на

$$L \geqslant f(y) \geqslant 0.$$

---

*) Journal de Liouville, 2 serie, XIX.

**) Mathematische Annalen, Bd. XXIV, стр. 172. См. также К. Поссе (C. Possé) «Sur quelques applications des fractions continues algebriques» (Петербург, 1886).

§ 1. Начнём со следующего вопроса:
Даны значения интегралов

$$\int_a^b f(y)\,dy = \alpha_0, \quad \int_a^b y f(y)\,dy = \alpha_1, \ldots,$$

$$\int_a^b y^{i-1} f(y)\,dy = \alpha_{i-1}. \tag{1}$$

Требуется найти экстремальные значения интеграла

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

при условии

$$L \geqslant f(y) \geqslant 0. \tag{2}$$

Приступая к решению нашего вопроса, положим, что $f(y)$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая условиям (1) и (2).

Между a и b возьмём какие-нибудь $i+1$ числа

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_i, \ \xi_{i+1}$$

и вблизи этих чисел — элементы одинаковой бесконечно малой длины σ.

На этих элементах дадим функции $f(y)$ постоянные приращения (положительные или отрицательные)

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \ldots, \ \delta_i, \ \delta_{i+1},$$

которые не нарушают условий (1) и (2).

Предполагая элементы σ бесконечно малыми, мы примем вместе с тем, что на каждом из них в отдельности функция $f(y)$ может достигать только одного из своих крайних значений 0 и L, а не обоих.

Если на некотором элементе σ функция не достигает ни одного из своих крайних значений 0 и L, то соответствующее приращение δ может одинаково хорошо быть как положительным, так и отрицательным, лишь бы оно по абсолютной величине было достаточно малым.

Если на элементе σ функция имеет крайнее значение L, то соответствующее значение δ должно быть отрицательным; если же значение 0, то δ должно быть положительным. Таким образом, условие (2) накладывает ограничения на значения δ.

Что касается условия (1), то оно нам даёт следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{i+1} = 0,\\
&\delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2 + \ldots + \delta_{i+1}\xi_{i+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_1\xi_1^{i-1} + \delta_2\xi_2^{i-1} + \ldots + \delta_{i+1}\xi_{i+1}^{i-1} = 0,
\end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_1)}, \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_2)}, \quad \ldots, \quad \delta_{i+1} = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_{i+1})},$$

где

$$\theta(y) = (y - \xi_1)(y - \xi_2)\ldots(y - \xi_{i+1})$$

и ε — произвольное число.

Положим

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{i+1}.$$

Тогда найденные значения

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \ldots, \ \delta_{i+1}$$

будут иметь те же знаки, что произведения

$$(-1)^i\varepsilon, \ (-1)^{i-1}\varepsilon, \ \ldots, \ \varepsilon.$$

Следовательно, рассмотренная вариация функции $f(y)$ возможна всякий раз, когда знаки величин

$$(-1)^i\varepsilon, \ (-1)^{i-1}\varepsilon, \ \ldots, \ \varepsilon$$

Таким же образом мы найдём, что

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(z-a)\,V_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(z)}{U_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(z)}= \\
&\qquad = e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}\,dy} + \frac{h'_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}+\ldots, \\
&\frac{(z-b)\,V_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(z)}{U_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(z)}= \\
&\qquad = \frac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}\,dy} + \frac{h'_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}+\ldots, \\
&\frac{V_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}{(z-b)\,U_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}= \\
&\qquad = e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}\,dy} + \frac{h''_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}+\ldots, \\
&\frac{V_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}{(z-a)\,U_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}= \\
&\qquad = \frac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}\,dy} + \frac{h''_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}+\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема I. *Если функция* $F(y)$ *удовлетворяет условию*

$$L \geqslant F(y) \geqslant 0,$$

то возможны следующие разложения *):

$$e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}dy} = \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\cfrac{c_3}{z-a-\ddots}}}}, \tag{8}$$

$$e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}dy} = 1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\cfrac{\gamma_3}{z-b+\cfrac{\gamma_4}{1+\ddots}}}}, \tag{9}$$

$$\frac{z-b}{z-a}e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}dy} = 1-\cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\cfrac{\partial_3}{z-a-\cfrac{\partial_4}{1-\ddots}}}}, \tag{10}$$

$$\frac{z-b}{z-a}e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}dy} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\cfrac{\delta_2}{1+\cfrac{\delta_3}{z-b+\cfrac{\delta_4}{1+\ddots}}}}}, \tag{11}$$

где c, γ, ∂, δ — *числа положительные.*

---

*) Такого рода непрерывные дроби употреблялись уже Стильтьесом в его «Recherches sur les fractions continues».

Эти разложения связаны с нашими функциями U и V формулами

$$\frac{V_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)}{U_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\ddots-\cfrac{c_{2n-1}}{z-a-c_{2n}}}}},\tag{12}$$

$$\frac{(z-a)\,V_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(z)}{U_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(z)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\ddots-\cfrac{c_{2n-2}}{1-\cfrac{c_{2n-1}}{z-a}}}},\tag{13}$$

$$\frac{V_{2n}^{(\mathrm{II})}(z)}{U_{2n}^{(\mathrm{II})}(z)}=1-\cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\ddots-\cfrac{\partial_{2n-1}}{z-a-\partial_{2n}}}},\tag{14}$$

$$\frac{V_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}{(z-a)\,U_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}=1-\cfrac{\partial_1}{z-a-\ddots-\cfrac{\partial_{2n-2}}{1-\cfrac{\partial_{2n-1}}{z-a}}},\tag{15}$$

$$\frac{V_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)}{U_{2n}^{(\mathrm{I})}(z)}=1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\ddots+\cfrac{\gamma_{2n-1}}{z-b+\gamma_{2n}}}},\tag{16}$$

$$\frac{V_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}{(z-b)\,U_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(z)}=1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\ddots+\cfrac{\gamma_{2n-2}}{1+\cfrac{\gamma_{2n-2}}{z-b}}},\tag{17}$$

$$\frac{V_{2n}^{(II)}(z)}{U_{2n}^{(II)}(z)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\cfrac{\delta_2}{1+\ddots+\cfrac{\delta_{2n-1}}{z-b+\delta_{2n}}}}}, \tag{18}$$

$$\frac{(z-b)V_{2n-1}^{(I)}(z)}{U_{2n-1}^{(I)}(z)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\ddots+\cfrac{\delta_{2n-2}}{1+\cfrac{\delta_{2n-1}}{z-b}}}}. \tag{19}$$

По известному свойству непрерывных дробей мы имеем:

$$c_1=\gamma_1=\frac{a_0}{L},$$

$$c_1c_2\ldots c_i=\frac{a_{i-1}-h'_{i-1}}{L},$$

$$\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2n-1}=\frac{a_{2n-2}-h'_{2n-2}}{L},$$

$$\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2n}=\frac{h''_{2n-1}-a_{2n-1}}{L},$$

$$\partial_1=\delta_1=b-a-\frac{a_0}{L},$$

$$\partial_1\partial_2\ldots\partial_i=\frac{h''_{i-1}-a_{i-1}}{L},$$

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{2n-1}=\frac{h''_{2n-2}-a_{2n-2}}{L},$$

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{2n}=\frac{a_{2n-1}-h'_{2n-1}}{L}. \tag{20}$$

Важно также отметить следующее предложение.

Если обыкновенная несократимая дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ равна

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{e_1}{x-\cfrac{e_2}{1-\cfrac{e_3}{x-\ddots-\cfrac{e_i}{x-1}}}}},$$

и числа $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_i$ положительны, то все корни уравнений

$$\varphi(x)=0 \quad \text{и} \quad \psi(x)=0$$

действительны, положительны и различны; более того, корни уравнения $\varphi(x)=0$ перемежаются с корнями уравнения $\psi(x)=0$.

Принимая во внимание это предложение и найденные формулы, легко, в обратном порядке, проверить наши выводы, основанные на существовании максимума и минимума интеграла

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy.$$

§ 5. Сейчас мы докажем, что найденные функции $f_{\min}$ и $f_{\max}$ дают также решение следующего общего вопроса.

Даны

$$\int_a^b f(y)\,dy=\alpha_0, \quad \int_a^b y f(y)\,dy=\alpha_1, \quad \ldots,$$

$$\int_a^b y^{i-1}f(y)\,dy=\alpha_{i-1}$$

и условие

$$L \geqslant f(y) \geqslant 0.$$

Требуется найти предельные значения интеграла

$$\int_a^b \Phi(y) f(y)\, dy$$

для всякой заданной функции $\Phi(y)$, *производная порядка* i *которой*

$$\frac{d^i\Phi(y)}{dy^i} = \Phi^{(i)}(y)$$

не меняет своего знака между $y=a$ *и* $y=b$.

Для этой цели, сохраняя обозначения § 2 и полагая

$$\Omega(y) = \Phi(y_1)\frac{(y-y_2)\,\ldots\,(y-y_i)}{(y_1-y_2)\,\ldots\,(y_1-y_i)} + \ldots$$

$$\ldots + \Phi(y_i)\frac{(y-y_1)\,\ldots\,(y-y_{i-1})}{(y_i-y_1)\,\ldots\,(y_i-y_{i-1})},$$

мы получим

$$\int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy - \int_a^b \Phi(y) f(y)\, dy =$$

$$= \int_a^b \{\Phi(y) - \Omega(y)\}\,\{F(y) - f(y)\}\, dy$$

и

$$\Phi(y) - \Omega(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}\,\Phi^{(i)}(y_0),$$

откуда

$$\int_a^b \Phi(y) F(y)\, dy = \int_a^b \Phi(y) f(y)\, dy +$$

$$+ \Phi^{(i)}(\zeta)\int_a^b \frac{\{F(y) - f(y)\}\,\omega(y)\, dy}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}, \quad (21)$$

где

$$\omega(y) = (y-y_1)(y-y_2)\,\ldots\,(y-y_i),$$

y_0 и ζ — некоторые числа между a и b.

Формула (21) применима к любой функции $\Phi(y)$. В случае же, когда

$$\Phi^{(i)}(y)>0 \text{ для } a<y<b,$$

из неё следуют неравенства

$$\int_a^b \Phi(y) f_{\min}\, dy \leqslant \int_a^b \Phi(y) F(y)\, dy \leqslant \int_a^b \Phi(y) f_{\max} dy$$

для любой функции $F(y)$, удовлетворяющей нашим условиям.

Если же

$$\Phi^{(i)}(y)<0 \quad \text{для } a<y<b,$$

то из формулы (21) следует, что

$$\int_a^b \Phi(y) f_{\min}\, dy \geqslant \int_a^b \Phi(y) F(y)\, dy \geqslant \int_a^b \Phi(y) f_{\max}\, dy.$$

Применяя эти результаты к функции

$$\Phi(y)=\frac{1}{z-y}$$

и полагая для определённости

$$z>b,$$

мы получаем следующую теорему:

Теорема II. *Если*

$$L \geqslant F(y) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad z>b,$$

то при разложении выражений

$$e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)}{z-y}\, dy} \quad \text{и} \quad \frac{z-a}{z-b}\, e^{-\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)}{z-y}\, dy}$$

в непрерывные дроби

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\cfrac{c_3}{z-a-\ldots}}}} \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{1-\cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\cfrac{\partial_3}{z-a-\ldots}}}}$$

все подходящие дроби этих разложений будут меньше, чем соответствующие выражения.

Если же при предыдущих условиях

$$L \geqslant F(y) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad z > b$$

те же выражения

$$e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}\,dy} \quad \text{и} \quad \frac{z-a}{z-b}\, e^{-\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)}{z-y}\,dy}$$

разложить в непрерывные дроби

$$1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\cfrac{\gamma_3}{z-b+\ldots}}} \quad \text{и} \quad 1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\cfrac{\delta_2}{1+\cfrac{\delta_3}{z-b+\ldots}}},$$

то подходящие дроби этих разложений будут попеременно больше и меньше, чем соответствующие выражения.

§ 6. Сохраняя наши условия (1), (2) и (3), перейдём к предельным значениям интеграла

$$\int\limits_a^x f(y)\,dy,$$

где x — заданное число, лежащее между a и b. Предварительно нам нужно будет доказать следующее простое предложение.

Если

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \ldots < \xi_\varkappa < \xi_{\varkappa+1} < \ldots < \xi_i < \xi_{i+1}$$

и

$$\theta(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) \ldots (z - \xi_i)(z - \xi_{i+1}),$$

то сумма

$$\frac{1}{\theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\theta'(\xi_2)} + \ldots + \frac{1}{\theta'(\xi_\varkappa)}$$

имеет тот же знак ($\pm$), что и её последний член

$$\frac{1}{\theta'(\xi_\varkappa)}.$$

В самом деле, для всякого полинома $\Omega(y)$ степени меньше, чем i, мы имеем

$$\frac{\Omega(\xi_1)}{\theta'(\xi_1)} + \frac{\Omega(\xi_2)}{\theta'(\xi_2)} + \ldots + \frac{\Omega(\xi_{i+1})}{\theta'(\xi_{i+1})} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\theta'(\xi_2)} + \ldots + \frac{1}{\theta'(\xi_\varkappa)} + \frac{\Omega(\xi_{\varkappa+1})}{\theta'(\xi_{\varkappa+1})} = 0,$$

если коэффициенты функции $\Omega(y)$ определяются уравнениями

$$\Omega(\xi_1) = \Omega(\xi_2) = \ldots = \Omega(\xi_\varkappa) = 1,$$

$$\Omega(\xi_{\varkappa+2}) = \Omega(\xi_{\varkappa+3}) = \ldots = \Omega(\xi_{i+1}) = 0.$$

С другой стороны, легко видеть, что производная $\Omega'(y)$ должна быть постоянно отрицательной в интервале от $y = \xi_\varkappa$ до $y = \xi_{\varkappa+2}$, если функция $\Omega(y)$ определена условиями, которые мы только что указали.

Отсюда следуют неравенства

$$0 < \Omega(\xi_{\varkappa+1}) < 1.$$

Следовательно, сумма

$$\frac{1}{\theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\theta'(\xi_2)} + \ldots + \frac{1}{\theta'(\xi_\varkappa)},$$

будучи заключённой между

$$0 \text{ и } -\frac{1}{\theta'(\xi_{x+1})},$$

имеет тот же знак, что

$$\frac{1}{\theta'(\xi_x)}.$$

Положим

$$\xi_x < x < \xi_{x+1}$$

и вспомним вариацию, которой в § 1 подвергалась функция $f(y)$. В силу предыдущих результатов эта вариация будет увеличивать или уменьшать значение интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

в зависимости от того, будет ли выражение

$$\delta_x = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_x)}$$

положительным или отрицательным.

Имея это, нетрудно показать, что для функции $f(y)$, соответствующей максимуму и минимуму интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

выполняются следующие условия:

1) $f(y)$ принимает только значения 0 и L;

2) интервал (a, b) делится на $l+2$ части, в которых $f(y)$ попеременно равна 0 и L;

3) $f(x-\varepsilon')=L$ и $f(x+\varepsilon')=0$ в случае максимума интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

$f(x-\varepsilon')=0$ и $f(x+\varepsilon')=L$ в случае минимума интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

где ε' — бесконечно малая положительная величина.

Но эти условия вполне определяют искомую функцию $f(y)$, как мы сейчас докажем.

Пусть

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_\varkappa < x < y_{\varkappa+1} < y_{\varkappa+2} < \ldots < y_{i-1} < y_i$$

— значения y, отделяющие значения 0 и L функции $f(y)$.

Пусть $F(y)$ — другая функция, удовлетворяющая условиям (1) и (2).

Полагая

$$(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i)=\theta(y)$$

и

$$\Omega(y)=\frac{\theta(y)}{(y-y_1)\,\theta'(y_1)}+\frac{\theta(y)}{(y-y_2)\,\theta'(y_2)}+\ldots+\frac{\theta(y)}{(y-y_\varkappa)\,\theta'(y_\varkappa)},$$

мы будем иметь

$$\Omega(y_1)=\Omega(y_2)=\ldots=\Omega(y_\varkappa)=1,$$

$$\Omega(y_{\varkappa+1})=\Omega(y_{\varkappa+2})=\ldots=\Omega(y_i)=0$$

и

$$\int_a^b\{f(y)-F(y)\}\,\Omega(y)\,dy=0.$$

Но можно написать

$$\int_a^x f(y)\,dy-\int_a^x F(y)\,dy=\int_a^b\{f(y)-F(y)\}\,\omega(y)\,dy,$$

если положить

$$\omega(y)=\begin{cases}1 \text{ для } a<y<x,\\ 0 \text{ для } x<y<b.\end{cases}$$

Отсюда следует, что разность

$$\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^x F(y)\,dy$$

равна интегралу

$$\int_a^b \{f(y)-F(y)\}\{\omega(y)-\Omega(y)\}\,dy,$$

все элементы которого имеют один и тот же знак, так как разности

$$f(y)-F(y) \quad \text{и} \quad \omega(y)-\Omega(y)$$

меняют знак одновременно.

Следовательно, наша функция $f(y)$ сообщает максимум или минимум интегралу

$$\int_a^x f(y)\,dy.$$

Наконец, чтобы удостовериться, что в случае максимума или минимума интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

выполняется соотношение $f(x-\varepsilon')=L$, соответственно $f(x-\varepsilon')=0$, где ε' — бесконечно малая положительная величина, достаточно заметить, что для $y_x<y<x$ разность

$$\omega(y)-\Omega(y)$$

положительна.

§ 7. Мы ограничимся здесь подробным рассмотрением решения вопроса о максимуме и минимуме интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

для случая чётного $l\,(=2n)$.

Для проведения исследования необходимо различать два случая в отношении значений y, отделяющих значения 0 и L функции $f(y)$.

В первом случае мы имеем

$$
\begin{array}{llll}
f(y)=0 \text{ для } & a<y<\xi_1, & f(y)=L \text{ для } & \xi_1<y<\eta_1,\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_1<y<\xi_2, & f(y)=L \text{ »} & \xi_2<y<\eta_2,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_{x-2}<y<\xi_{x-1}, & f(y)=L \text{ »} & \xi_{x-1}<y<\eta_{x-1},\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_{x-1}<y<x, & f(y)=L \text{ »} & x<y<\eta_x,\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_x<y<\xi_x, & f(y)=L \text{ »} & \xi_x<y<\eta_{x+1},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_n<y<\xi_n, & f(y)=L \text{ »} & \xi<y<b,
\end{array}
$$

и во втором случае:

$$
\begin{array}{llll}
f(y)=L \text{ для } & a<y<\eta_1, & f(y)=0 \text{ для } & \eta_1<y<\xi_1,\\
f(y)=L \text{ »} & \xi_1<y<\eta_2, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_2<y<\xi_2,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
f(y)=L \text{ »} & \xi_{x-1}<y<\eta_x, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_x<y<x,\\
f(y)=L \text{ »} & x<y<\eta_{x+1}, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_{x+1}<y<\xi_x,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
f(y)=L \text{ »} & \xi_{n-1}<y<\eta_{n+1}, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_{n+1}<y<b.
\end{array}
$$

Рассматривая отдельно оба случая и добавляя к обозначениям § 3 следующие обозначения:

$P(z)$ равно произведению множителей $z-\xi$,
$Q(z)$ » » » $z-\eta$,

мы с помощью вычислений, подобных тем, которые были проведены в § 3, найдём формулы

$$
\frac{(z-x)P(z)}{(z-b)Q(z)}=1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{\gamma_{2n}}{1+\cfrac{\gamma}{z-b}}}}},
$$

Отсюда следует, что разность

$$\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^x F(y)\,dy$$

равна интегралу

$$\int_a^b \{f(y) - F(y)\}\{\omega(y) - \Omega(y)\}\,dy,$$

все элементы которого имеют один и тот же знак, так как разности

$$f(y) - F(y) \quad \text{и} \quad \omega(y) - \Omega(y)$$

меняют знак одновременно.

Следовательно, наша функция $f(y)$ сообщает максимум или минимум интегралу

$$\int_a^x f(y)\,dy.$$

Наконец, чтобы удостовериться, что в случае максимума или минимума интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

выполняется соотношение $f(x - \varepsilon') = L$, соответственно $f(x - \varepsilon') = 0$, где ε' — бесконечно малая положительная величина, достаточно заметить, что для $y_x < y < x$ разность

$$\omega(y) - \Omega(y)$$

положительна.

§ 7. Мы ограничимся здесь подробным рассмотрением решения вопроса о максимуме и минимуме интеграла

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

для случая чётного $i\,(=2n)$.

Для проведения исследования необходимо различать два случая в отношении значений y, отделяющих значения 0 и L функции $f(y)$.

В первом случае мы имеем

$$\begin{array}{llll}
f(y)=0 \text{ для } & a<y<\xi_1, & f(y)=L \text{ для } & \xi_1<y<\eta_1,\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_1<y<\xi_2, & f(y)=L \text{ »} & \xi_2<y<\eta_2,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_{x-2}<y<\xi_{x-1}, & f(y)=L \text{ »} & \xi_{x-1}<y<\eta_{x-1},\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_{x-1}<y<x, & f(y)=L \text{ »} & x<y<\eta_x,\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_x<y<\xi_x, & f(y)=L \text{ »} & \xi_x<y<\eta_{x+1},\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
f(y)=0 \text{ »} & \eta_n<y<\xi_n, & f(y)=L \text{ »} & \xi<y<b,
\end{array}$$

и во втором случае:

$$\begin{array}{llll}
f(y)=L \text{ для } & a<y<\eta_1, & f(y)=0 \text{ для } & \eta_1<y<\xi_1,\\
f(y)=L \text{ »} & \xi_1<y<\eta_2, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_2<y<\xi_2,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
f(y)=L \text{ »} & \xi_{x-1}<y<\eta_x, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_x<y<x,\\
f(y)=L \text{ »} & x<y<\eta_{x+1}, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_{x+1}<y<\xi_x,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
f(y)=L \text{ »} & \xi_{n-1}<y<\eta_{n+1}, & f(y)=0 \text{ »} & \eta_{n+1}<y<b.
\end{array}$$

Рассматривая отдельно оба случая и добавляя к обозначениям § 3 следующие обозначения:

$P(z)$ равно произведению множителей $z-\xi$,

$Q(z)$ » » » $z-\eta$,

мы с помощью вычислений, подобных тем, которые были проведены в § 3, найдём формулы

$$\frac{(z-x)P(z)}{(z-b)Q(z)}=1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\ddots+\cfrac{\gamma_{2n}}{1+\cfrac{\gamma}{z-b}}}},$$

$$\gamma = \frac{(b-x)\,V_{2n}^{(\mathrm{I})}(x)}{V_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(x)},$$

$$\frac{(z-x)\,P(z)}{(z-a)\,Q(z)} = 1 - \cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\ddots-\cfrac{\partial_{2n}}{1-\cfrac{\partial}{z-a}}}},$$

$$\partial = \frac{(x-a)\,V_{2n}^{(\mathrm{II})}(x)}{V_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(x)},$$

$$L\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2n}\gamma + L\partial_1\partial_2\ldots\partial_{2n}\partial = h''_{2n} - h'_{2n}$$

в первом случае, и формулы

$$\frac{(z-a)(z-x)\,P(z)}{Q(z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\ddots-\cfrac{c_{2n}}{1-\cfrac{c}{z-a}}}}},$$

$$c = \frac{V_{2n}^{(\mathrm{I})}(x)}{V_{2n-1}^{(\mathrm{I})}(x)},$$

$$\frac{(z-b)(z-x)\,P(z)}{Q(z)} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\cfrac{\delta_2}{1+\ddots+\cfrac{\delta_{2n}}{1+\cfrac{\delta}{z-b}}}}},$$

$$\delta = -\frac{V_{2n}^{(\mathrm{II})}(x)}{V_{2n-1}^{(\mathrm{II})}(x)},$$

$$Lc_1c_2\ldots c_{2n}c + L\delta_1\delta_2\ldots\delta_{2n}\delta = h''_{2n} - h'_{2n}$$

— во втором случае.

Из этих формул легко заметить, что мы должны остановиться на первом случае, когда

$$V_{2n}^{(I)}(x)\,V_{2n}^{(II)}(x) > 0,$$

и на втором случае, когда

$$V_{2n}^{(I)}(x)\,V_{2n}^{(II)}(x) < 0.$$

Что касается искомого минимума интеграла, то он выражается через

$$L\{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{x-1}-\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{x-1}\}$$

в первом случае и через

$$L\{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_x-\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{x-1}-a\}$$

— во втором случае.

§ 8. Заканчивая, мы отметим метод приближённого вычисления интегралов, который вытекает из предыдущих исследований. Этот метод основан на том, что предложенный интеграл

$$\int_a^b \Phi(y)\,F(y)\,dy$$

заменяют интегралом

$$\int_a^b \Phi(y)\,f_{\min}\,dy$$

или

$$\int_a^b \Phi(y)\,f_{\max}\,dy,$$

которые сводятся к сумме интегралов вида

$$L\int_a^{\eta} \Phi(y)\,dy, \quad L\int_{\xi}^{\eta} \Phi(y)\,dy, \quad L\int_{\xi}^{b} \Phi(y)\,dy.$$

Мы сохраняем здесь обозначения § 3, объединяя только знаки ξ', ξ'' в один знак ξ и η', η'' — в η. Полагая

$$\Phi(y) = \varphi'(y) \quad \text{и} \quad F'(y) = g(y)$$

и принимая во внимание равенство

$$\int_a^b g(y)\,\varphi(y)\,dy = F(b)\,\varphi(b) - F(a)\,\varphi(a) - \int_a^b F(y)\,\Phi(y)\,dy,$$

мы указанную формулу преобразуем в следующую:

$$\int_a^b g(y)\,\varphi(y)\,dy = L'\,\varphi(b) - L''\,\varphi(a) + L\sum\varphi(\xi) - \\ - L\sum\varphi(\eta) + K\varphi^{(i+1)}(\zeta),$$

где K — постоянное число, ζ — число, заключённое между a и b, и

$$\begin{aligned} L' &= F(b) \quad \text{или} \quad F(b) - L, \\ L'' &= F(a) \quad \text{»} \quad F(a) - L. \end{aligned}$$

Не нужно забывать, что в нашей формуле предполагается, что

$$L \geqslant F(y) \geqslant 0.$$

Числа L' и L'' вообще отличны от 0 и $\pm L$.

Изучая условия, при которых L' и L'' становятся равными 0 или $\pm L$, мы приходим к следующим двум случаям: 1-й случай:

$$\int_a^b g(y)\,dy = 0,$$

$$F(y) = \int_a^y g(y)\,dy \leqslant 0;$$

2-й случай:

$$L = \int_a^b g(y)\,dy; \quad F(y) = \int_a^y g(y)\,dy \leqslant 0;$$

В этих двух случаях и в случаях, которые отличаются от них только знаком $g(y)$, наша формула будет по внешнему виду одинаковой с той, которую рассматривал Чебышев в последних параграфах своего мемуара «Sur les quadratures» *). Разница заключается только в значении множителя L. Однако благодаря изменению этого множителя мы можем быть уверены, что все числа в наших выкладках являются действительными, и затем мы можем дать приближённую формулу с дополнительным членом.

*) Journal de Liouville, 2 série, XIX. [См. также «Избранные математические труды» П. Л. Чебышева, Гостехиздат, 1946, стр. 117—133 (*Ред.*).]

9. О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИНАХ ИНТЕГРАЛОВ В СВЯЗИ С ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ

В настоящей статье мы имеем в виду: во-первых, дать возможно бо̀льшую общность прежде полученным результатам *); во-вторых, видоизменить и дополнить доказательства и, наконец, в-третьих, установить связь между нашими исследованиями и некоторыми другими **).

Исследования о наибольших и наименьших величинах можно разделить на три стадии.

Первая стадия состоит в установлении условий, которые должны служить для определения искомой наибольшей или наименьшей величины и других связанных с ней неизвестных величин или функций; вторая стадия состоит в определении всех искомых или, по крайней мере, в выяснении того, что установленные условия не заключают в себе ни неопределённости, ни противоречия; наконец, третья стадия должна выяснять, что полученный результат действительно даёт искомую предельную величину.

---

*) О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей. 1884. Sur une question de maximum et de minimum (Acta mathematica, 1886). Новые приложения непрерывных дробей. (Записки Акад. Наук, 1896.)

**) П. Чебышев, Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données. (Mémoire de l'Académie de St. Petersbourg, VII Série, т. I, 1859.)

А. Коркин и Е. Золотарёв, Sur un certain minimum (Nouvelles Annales, 1873.)

Стильтьес. Jets over de benaderde voorstelling van eene unctie door eene andere. (Delft, 1876.)

Многие исследования этого рода, конечно, останавливаются на первой стадии; но отсутствие второй и третьей стадий составляет такой существенный пробел подобных исследований, что может лишать полученный результат почти всякого значения. Отсутствие второй и третьей стадий нельзя оправдать голословным заявлением, к которому иногда прибегают, будто бы очевидно a priori, что задача должна иметь решение.

Напротив, при надлежащем развитии второй и третьей стадий, первая может быть без ущерба сокращена или вовсе опущена, если искомое решение можно угадать.

В наших исследованиях мы имеем дело как раз с такими задачами, решение которых нетрудно угадать по аналогии с решением ранее рассмотренных задач; мы только придаём прежним выводам бо́льшую общность.

Поэтому мы считаем лишним останавливаться на первой стадии и ограничимся развитием двух других.

§ 1. Прежде чем приступить к постановке вопросов, введём, как было уже нами сделано в статье «Sur une question de maximum et de minimum», ряд функций

$$\lambda_1(z),\ \lambda_2(z),\ \ldots,\ \lambda_n(z),\ \lambda_{n+1}(z),\ \ldots,$$

удовлетворяющих условиям

$$\lambda_1(z > 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \lambda_1''(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \lambda_2''(z) \\ \lambda_3(z) & \lambda_3'(z) & \lambda_3''(z) \end{vmatrix} > 0, \ \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \ldots & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \ldots & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n+1}(z) & \lambda_{n+1}'(z) & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n)}(z) \end{vmatrix} > 0$$

для всех значений z, лежащих между a и b:

$$(a \leqslant z \leqslant b).$$

Относительно таких функций λ докажем следующее предложение, на котором будут основаны наши дальнейшие рассуждения.

Теорема 1. Если

$$a \leqslant u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} \leqslant b,$$

то определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) & \ldots & \lambda_1(u_n) & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2(u_2) & \ldots & \lambda_2(u_n) & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \lambda_3(u_1) & \lambda_3(u_2) & \ldots & \lambda_3(u_n) & \lambda_3(u_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n+1}(u_1) & \lambda_{n+1}(u_2) & \ldots & \lambda_{n+1}(u_n) & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1} \\ u_1 u_2 & \ldots & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

— число положительное.

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $n = 0$ теорема очевидна, так как в этом случае она сводится к неравенству

$$\lambda_1(z) > 0$$

при

$$a \leqslant z \leqslant b.$$

Поэтому для полного её доказательства мы можем употребить известный приём последовательного увеличения числа n.

Допустив, что теорема справедлива при n функциях λ и при n величинах u, удовлетворяющих нашим условиям, мы покажем, что теорема будет справедлива также при $n+1$ функциях λ и $n+1$ величинах u.

Для этой цели представим наш определитель

$$\Delta \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1} \\ u_1 u_2 & \ldots & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

в виде произведения выражения $\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_2)\ldots\lambda_1(u_{n+1})$ на определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_2(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & \frac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_2(u_2)}{\lambda_1(u_2)} & \ldots & \frac{\lambda_2(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_2(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \\ \frac{\lambda_3(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & \frac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_3(u_2)}{\lambda_1(u_2)} & \ldots & \frac{\lambda_3(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_3(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\lambda_{n+1}(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_{n+1}(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & \frac{\lambda_{n+1}(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_{n+1}(u_2)}{\lambda_1(u_2)} & \ldots & \frac{\lambda_{n+1}(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_{n+1}(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \end{vmatrix},$$

который мы можем приравнять произведению

$$(u_2-u_1)(u_3-u_2)\ \ldots\ (u_{n+1}-u_n)\,\Delta\begin{pmatrix}\Delta_1\Delta_2 & \ldots & \Delta_n \\ U_1U_2 & \ldots & U_n\end{pmatrix},$$

полагая

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Delta_1(z),\quad \frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_3(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Delta_2(z),\ \ldots$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_{n+1}(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Delta_n(z)$$

и вводя некоторые новые числа

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n,$$

удовлетворяющие неравенствам

$$u_1<U_1<u_2<U_2<u_3<\ldots<u_n<U_n<u_{n+1}.$$

Новые функции Δ, подобно прежним λ, удовлетворяют условиям

$$\Delta_1(z)>0,\quad \begin{vmatrix}\Delta_1(z) & \Delta_1'(z) \\ \Delta_2(z) & \Delta_2'(z)\end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix}\Delta_1(z) & \Delta_1'(z) & \Delta_1''(z) \\ \Delta_2(z) & \Delta_2'(z) & \Delta_2''(z) \\ \Delta_3(z) & \Delta_3'(z) & \Delta_3''(z)\end{vmatrix}>0,\ \ldots$$

при $a \leqslant z \leqslant b$, так как определитель

$$\begin{vmatrix} \Delta_1(z) & \Delta_1'(z) & \Delta_1''(z) & \ldots & \Delta_1^{(k-1)}(z) \\ \Delta_2(z) & \Delta_2'(z) & \Delta_2''(z) & \ldots & \Delta_2^{(k-1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Lambda_k(z) & \Lambda_k'(z) & \Lambda_k''(z) & \ldots & \Lambda_k^{(k-1)}(z) \end{vmatrix}$$

отличается только делителем $\{\lambda_1(z)\}^{k+1}$ от

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \ldots & \lambda_1^{(k)}(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \ldots & \lambda_2^{(k)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{k+1}(z) & \lambda_{k+1}'(z) & \ldots & \lambda_{k+1}^{(k)}(z) \end{vmatrix},$$

в чём можно убедиться посредством довольно простых преобразований на основании формулы Лейбница

$$\Lambda_i^{(l)}(z) = \frac{1}{\lambda_1(z)}\lambda_{i+1}^{(l+1)}(z) + (l+1)\left(\frac{1}{\lambda_1(z)}\right)'\lambda_{i+1}^{(l)}(z) + \\ + \frac{(l+1)\,l}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{\lambda_1(z)}\right)''\lambda_{i+1}^{(l-1)}(z) + \ldots$$

Отсюда, согласно сделанному нами допущению, следует, что определитель

$$\Delta\begin{pmatrix}\Lambda_1\Lambda_2 & \ldots & \Lambda_n \\ U_1U_2 & \ldots & U_n\end{pmatrix}$$

— число положительное, а вместе с тем и определитель

$$\Delta\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1} \\ u_1u_2 & \ldots & u_{n+1}\end{pmatrix}$$

должен быть, в силу вышеуказанных равенств, также числом положительным.

Итак, нашу теорему можно считать вполне доказанной. Из неё вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. Если некоторые из неравенств

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < u_{n+1}$$

мы заменим равенствами, не допуская, однако, равенств трёх чисел нашей системы

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1},$$

и если соответственно каждому равенству

$$u_i = u_{i+1}$$

мы заменим в определителе

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) & \ldots & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2(u_2) & \ldots & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n+1}(u_1) & \lambda_{n+1}(u_2) & \ldots & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

элементы $i+1$-го столбца

$$\lambda_1(u_{i+1}), \lambda_2(u_{i+1}), \ldots, \lambda_{n+1}(u_{i+1})$$

соответственно на

$$\lambda_1'(u_i), \lambda_2'(u_i), \ldots, \lambda_{n+1}'(u_i),$$

то полученный таким образом новый определитель будет также числом положительным.

К указанной замене можно притти посредством уменьшения разности $u_{i+1} - u_i$ до предела нуль после деления первоначального определителя на величину этой разности.

Отсюда следует, что новый определитель не может быть числом отрицательным; остаётся, однако, под сомнением, не может ли новый определитель обратиться в нуль. Мы устраним это сомнение, если при помощи преобразований, аналогичных вышеуказанным, представим новый определитель в виде произведения некоторого выражения, не равного нулю, на определитель

$$\Delta\begin{pmatrix} \Delta_1 \, \Delta_2 \ldots \Delta_n \\ U_1 \, U_2 \ldots U_n \end{pmatrix},$$

где, как и прежде,

$$\Delta_1(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)}\right\}, \quad \Delta_2(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_3(z)}{\lambda_1(z)}\right\}, \ldots,$$

$$\Delta_n(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_{n+1}(z)}{\lambda_1(z)}\right\},$$

$$a < U_1 < U_2 < \ldots < U_n < b.$$

Для уяснения дела достаточно рассмотреть один частный случай. Возьмём, например, определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1'(u_1) & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2'(u_1) & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1) & \lambda_3'(u_1) & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix}.$$

Подвергая его простым преобразованиям, последовательно получаем

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1'(u_1) & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2'(u_1) & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1) & \lambda_3'(u_1) & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3) \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda_1'(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & 1 \\ \frac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & \frac{\lambda_2'(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & \frac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)} \\ \frac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & \frac{\lambda_3'(u_1)}{\lambda_1(u_1)} & \frac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3) \begin{vmatrix} \Delta_1(u_1) & \frac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)} - \frac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)} \\ \Delta_2(u_1) & \frac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)} - \frac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3)\{u_3 - u_1\} \begin{vmatrix} \Delta_1(U_1) & \Delta_1(U_2) \\ \Delta_2(U_1) & \Delta_2(U_2) \end{vmatrix},$$

где

$$U_1 = u_1 < U_3 < u_3.$$

Следствие 2. Если элементы

$$\lambda_1(u_{2k}),\ \lambda_2(u_{2k}),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}(u_{2k})$$

каждого чётного столбца определителя

$$\Delta\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1}\\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{n+1}\end{pmatrix}$$

мы заменим соответственно на

$$\lambda_1'(u_{2k-1}),\ \lambda_2'(u_{2k-1}),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}'(u_{2k-1}),$$

то полученный таким образом новый определитель будет оставаться числом положительным, каковы бы ни были числа

$$u_1,\ u_3,\ u_5,\ \ldots,$$

если только они все заключаются между a и b и различны друг от друга.

Это следствие вытекает из предыдущего.

Примечание. В нашей теореме и её следствиях функция $\lambda_{n+1}(z)$ может быть заменена любой другой функцией $\Omega(z)$, которая удовлетворяет только неравенству

$$\begin{vmatrix}\lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \ldots & \lambda_1^{(n)}(z)\\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \ldots & \lambda_2^{(n)}(z)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_n(z) & \lambda_n'(z) & \ldots & \lambda_n^{(n)}(z)\\ \Omega(z) & \Omega'(z) & \ldots & \Omega^{(n)}(z)\end{vmatrix} > 0$$

для всего промежутка от $z = a$ до $z = b$.

Можно даже допустить, что последнее неравенство иногда обращается в равенство, но тогда придётся присоединить к положительным числам и нуль.

Следствие 3. Если функция $\Omega(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \dots & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \dots & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n(z) & \lambda_n'(z) & \dots & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z) & \Omega'(z) & \dots & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

для всего промежутка от $z=a$ до $z=b$, а коэффициенты

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

выражения

$$\Phi(z)=p_1\lambda_1(z)+p_2\lambda_2(z)+\dots+p_n\lambda_n(z)$$

определены из системы уравнений

$$\begin{aligned} &p_1\lambda_1(u_1)+p_2\lambda_2(u_1)+\dots+p_n\lambda_n(u_1)=\Omega(u_1),\\ &p_1\lambda_1(u_2)+p_2\lambda_2(u_2)+\dots+p_n\lambda_n(u_2)=\Omega(u_2),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &p_1\lambda_1(u_n)+p_2\lambda_2(u_n)+\dots+p_n\lambda_n(u_n)=\Omega(u_n), \end{aligned}$$

причём

$$a \leqslant u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} < u_n \leqslant b,$$

то мы должны иметь

$$\begin{aligned} &\Phi(z)\leqslant\Omega(z) \text{ при } && u_n<z<b,\\ &\Phi(z)\geqslant\Omega(z) \quad » && u_{n-1}<z<u_n,\\ &\Phi(z)\leqslant\Omega(z) \quad » && u_{n-2}<z<u_{n-1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &(-1)^n\Phi(z)\geqslant(-1)^n\Omega(z) \text{ при } && u_1<z<u_2,\\ &(-1)^n\Phi(z)\leqslant(-1)^n\Omega(z) \quad » && a<z<u_1. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно заметить формулу

$$\Delta\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n\\ u_1 & u_2 & \dots & u_n\end{pmatrix}\{\Omega(z)-\Phi(z)\}=\Delta\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n & \Omega\\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & z\end{pmatrix}.$$

§ 2. Присоединим теперь к функциям

$$\lambda_1(z),\ \lambda_2(z),\ \dots,\ \lambda_n(z),\ \lambda_{n+1}(z),$$

удовлетворяющим вышеуказанным неравенствам, какую-нибудь функцию $\Omega(z)$, которая удовлетворяет неравенствам

$$\Omega(z)\geqslant 0,\quad \begin{vmatrix}\lambda_1(z) & \lambda_1'(z)\\ \Omega(z) & \Omega'(z)\end{vmatrix}\geqslant 0,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \lambda_1''(z)\\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \lambda_2''(z)\\ \Omega(z) & \Omega'(z) & \Omega''(z)\end{vmatrix}\geqslant 0,\ \dots,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \lambda_1''(z) & \dots & \lambda_1^{(n+1)}(z)\\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \lambda_2''(z) & \dots & \lambda_2^{(n+1)}(z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_{n+1}(z) & \lambda_{n+1}'(z) & \lambda_{n+1}''(z) & \dots & \lambda_{n+1}^{(n+1)}(z)\\ \Omega(z) & \Omega'(z) & \Omega''(z) & \dots & \Omega^{(n+1)}(z)\end{vmatrix}\geqslant 0$$

для всех значений z, в промежутке от $z=a$ до $z=b$.

Относительно такой функции $\Omega(z)$ мы можем установить следующую теорему.

Теорема 2. *Если функции*

$$\lambda_1(z),\ \lambda_2(z),\ \dots,\ \lambda_n(z),\ \lambda_{n+1}(z),\ \Omega(z)$$

удовлетворяют вышеустановленным условиям и если, кроме того, данные числа

$$a_k,\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \dots,\ a_1,\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_{l-1},\ b_l,$$

где $k+l=n+1$, *удовлетворяют неравенствам*

$$a\leqslant a_k<a_{k-1}<\dots<a_1<b_1<b_2<\dots<b_l\leqslant b,$$

то, определив числовые коэффициенты

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$$

из системы $n+1$ *уравнений первой степени*

$$\begin{aligned}
&p_1\lambda_1(a_k)+p_2\lambda_2(a_k)+\ldots+p_n\lambda_n(a_k)+\\
&\qquad\qquad+p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_k)=\Omega(a_k),\\
&p_1\lambda_1(a_{k-1})+p_2\lambda_2(a_{k-1})+\ldots+p_n\lambda_n(a_{k-1})+\\
&\qquad\qquad+p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_{k-1})=\Omega(a_{k-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_1\lambda_1(a_1)+p_2\lambda_2(a_1)+\ldots+p_n\lambda_n(a_1)+\\
&\qquad\qquad+p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_1)=\Omega(a_1),\\
&p_1\lambda_1(b_1)+p_2\lambda_2(b_1)+\ldots+p_n\lambda_n(b_1)+\\
&\qquad\qquad+p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_1)=0,\\
&p_1\lambda_1(b_2)+p_2\lambda_2(b_2)+\ldots+p_n\lambda_n(b_2)+\\
&\qquad\qquad+p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_2)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_1\lambda_1(b_l)+p_2\lambda_2(b_l)+\ldots+p_n\lambda_n(b_l)+\\
&\qquad\qquad+p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_l)=0,
\end{aligned}$$

мы получим такую функцию

$$\Phi(z)=p_1\lambda_1(z)+p_2\lambda_2(z)+\ldots+p_{n+1}\lambda_{n+1}(z),$$

которая удовлетворяет неравенствам

$$\begin{array}{llll}
\Phi(z)\leqslant\Omega(z) \text{ при } a_1\leqslant z\leqslant b_1, & \Phi(z)\geqslant 0 \text{ при } a_1\leqslant z\leqslant b_1,\\
\Phi(z)\geqslant\Omega(z) \quad » \quad a_2\leqslant z\leqslant a_1, & \Phi(z)\leqslant 0 \quad » \quad b_1\leqslant z\leqslant b_2,\\
\Phi(z)\leqslant\Omega(z) \quad » \quad a_3\leqslant z\leqslant a_2, & \Phi(z)\geqslant 0 \quad » \quad b_2\leqslant z< b_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(-1)^{k-1}\,\Phi(z)\leqslant(-1)^{k-1}\,\Omega(z) & \text{при } a_k\leqslant z\leqslant a_{k-1},\\
(-1)^{k}\,\Phi(z)\leqslant(-1)^{k}\,\Omega(z) & \quad » \quad a\leqslant z\leqslant a_k,\\
(-1)^{l-1}\,\Phi(z)\geqslant 0 & \quad » \quad b_{l-1}\leqslant z\leqslant b_l,\\
(-1)^{l}\,\Phi(z)\geqslant 0 & \quad » \quad b_l< z< b.
\end{array}$$

Доказательство. Эта теорема была уже нами доказана в мемуаре «Sur une question de maximum et de minimum»; здесь мы приведём другое доказательство.

Прежде всего заметим, что теорема оправдывается при $k=0$, так как $\Phi(z)$ приводится тогда к нулю.

Наша теорема оправдывается и в том случае, когда

$$k=1, \text{ а } l=0.$$

Действительно, в этом случае получаем

$$\Phi(z)=\frac{\lambda_1(z)}{\lambda_1(a_1)}\Omega(a_1),$$

и потому разность

$$\Phi(z)-\Omega(z),$$

равная

$$\frac{1}{\lambda_1(a_1)}\begin{vmatrix}\lambda_1(z) & \lambda_1(a_1)\\ \Omega(z) & \Omega(a_1)\end{vmatrix}=\frac{-1}{\lambda_1(a_1)}\begin{vmatrix}\lambda_1(a_1) & \lambda_1(z)\\ \Omega(a_1) & \Omega(z)\end{vmatrix},$$

будет числом положительным при $a<z<a_1$ и напротив — отрицательным при $a_1<z<b$; вместе с тем, имеем

$$\Phi(z)\geqslant 0$$

при всех рассматриваемых нами значениях z.

На этом основании для полного доказательства нашей теоремы можно воспользоваться тем же приёмом последовательного увеличения числа n.

Допустим же, что теорема уже доказана для того случая, когда $n+1$ заменено на n.

Затем введём в рассмотрение два выражения:

$$\Phi_0(z)=\overset{0}{p}_1\lambda_1(z)+\overset{0}{p}_2\lambda_2(z)+\ldots+\overset{0}{p}_n\lambda_n(z)$$

и

$$\Phi_1(z)=p_1'\lambda_1(z)+p_2'\lambda_2(z)+\ldots+p_n'\lambda_n(z),$$

коэффициенты которых

$$\overset{0}{p}_1,\ \overset{0}{p}_2,\ \ldots,\ \overset{0}{p}_n,\ p_1',\ p_2',\ \ldots,\ p_n'$$

определены условиями

$$
\begin{array}{ll}
\Phi_0(a_k) = \Omega(a_k), & \\
\Phi_0(a_{k-1}) = \Omega(a_{k-1}), & \Phi_1(a_{k-1}) = \Omega(a_{k-1}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_0(a_1) = \Omega(a_1), & \Phi_1(a_1) = \Omega(a_1), \\
\Phi_0(b_1) = 0, & \Phi_1(b_1) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_0(b_{l-1}) = 0, & \Phi_1(b_{l-1}) = 0, \\
 & \Phi_1(b_l) = 0.
\end{array}
$$

Тогда, согласно допущению,

$$
\begin{gathered}
(-1)^k \Phi_0(z) \leqslant (-1)^k \Omega(z) \text{ при } a < z < a_k, \\
(-1)^{k-1} \Phi_1(a_k) \leqslant (-1)^{k-1} \Omega(a_k), \\
(-1)^{k-1} \Phi_0(z) \text{ и } (-1)^{k-1} \Phi_1(z) \leqslant (-1)^{k-1} \Omega(z) \\
\text{при } a_k < z < a_{k-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\begin{array}{llll}
\Phi_0(z) \text{ и } \Phi_1(z) \geqslant \Omega(z) & \text{при} & a_2 < z < a_1, \\
\Phi_0(z) \text{ »} \ \Phi_1(z) \leqslant \Omega(z) & \text{»} & a_1 < z < b_1, \\
\Phi_0(z) \text{ »} \ \Phi_1(z) \geqslant 0 & \text{»} & a_1 < z < b_1, \\
\Phi_0(z) \text{ »} \ \Phi_1(z) \leqslant 0 & \text{»} & b_1 < z < b_2
\end{array} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(-1)^{l-1} \Phi_0(z) \text{ и } (-1)^{l-1} \Phi_1(z) \geqslant 0 \text{ при } b_{l-1} < z < b_l. \\
(-1)^{l-1} \Phi_0(b_l) \geqslant 0, \ (-1)^l \Phi_1(z) \geqslant 0 \ \text{»} \ b_l < z < b.
\end{gathered}
$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что функция $\Phi(z)$, определённая условиями теоремы, связана со вспомогательными функциями $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ формулами

$$
\Phi(z) = \Phi_0(z) - \Phi_0(b_l) \frac{\Delta_0(z)}{\Delta_0(b_l)}
$$

и

$$
\Phi(z) = \Phi_1(z) + \{\Omega(a_k) - \Phi_1(a_k)\} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(a_k)},
$$

где

$$\Delta_0(z)=\begin{vmatrix} \lambda_1(a_k) & \ldots & \lambda_1(a_1) & \lambda_1(b_1) & \ldots & \lambda_1(b_{l-1}) & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(a_k) & \ldots & \lambda_2(a_1) & \lambda_2(b_1) & \ldots & \lambda_2(b_{l-1}) & \lambda_2(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n+1}(a_k) & \ldots & \lambda_{n+1}(a_1) & \lambda_{n+1}(b_1) & \ldots & \lambda_{n+1}(b_{l-1}) & \lambda_{n+1}(z) \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta_1(z)=\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1(a_{k-1}) & \ldots & \lambda_1(a_1) & \lambda_1(b_1) & \ldots & \lambda_1(b_l) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2(a_{k-1}) & \ldots & \lambda_2(a_1) & \lambda_2(b_1) & \ldots & \lambda_2(b_l) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n+1}(z) & \lambda_{n+1}(a_{k-1}) & \ldots & \lambda_{n+1}(a_1) & \lambda_{n+1}(b_1) & \ldots & \lambda_{n+1}(b_l) \end{vmatrix}$$

На этом основании, в силу теоремы 1, мы можем написать неравенства

$$(-1)^k\Phi(z)<(-1)^k\Phi_0(z)\leqslant(-1)^k\Omega(z)$$
$$\text{при } a<z<a_k,$$
$$(-1)^{k-1}\Phi(z)\leqslant(-1)^{k-1}\Phi_0(z)\leqslant(-1)^{k-1}\Omega(z)$$
$$\text{при } a_k<z<a_{k-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{array}{lll} \Phi(z)>\Phi_0(z)>\Omega(z) & \text{при} & a_2<z<a_1 \\ \Phi(z)<\Phi_0(z)<\Omega(z) & \text{»} & a_1<z<b_1, \\ \Phi(z)>\Phi_1(z)>0 & \text{»} & a_1<z<b_1, \\ \Phi(z)<\Phi_1(z)<0 & \text{»} & b_1<z<b_2, \\ \cdots & & \end{array}$$
$$(-1)^l\Phi(z)>(-1)^l\Phi_1(z)>0 \text{ при } b_l<z<b.$$

Таким образом, мы получили неравенства теоремы.

Надо, однако, заметить, что мы предполагали l и k отличными от нуля.

Если же $l=0$, функция $\Phi_0(z)$ теряет смысл.

В этом случае остаётся одна вспомогательная функция $\Phi_1(z)$, которая может служить для доказательства неравенства

$$\Phi(z) \geqslant 0$$

при $a_1 < z < b$.

Что же касается остальных неравенств теоремы 2, то при $l = 0$ они заключаются в 3-м следствии теоремы 1.

Наконец, случай $k = 0$ не представляет никаких затруднений, как было уже замечено.

Изложенного достаточно для того, чтобы признать нашу теорему 2 вполне доказанной.

§ 3. Приступим теперь к решению такой задачи:

Даны числа a, b, c, C и значения интегралов

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz = \alpha_2, \ldots,$$

$$\int_a^b f(z)\lambda_n(z)\,dz = \alpha_n;$$

найти предельные величины интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz,$$

если $f(z)$ ограничена неравенствами

$$c \leqslant f(z) \leqslant C$$

на всём промежутке от $z = a$ до $z = b$.

Относительно функций λ мы будем предполагать, что они удовлетворяют ранее установленным неравенствам.

Поставленная задача, очевидно, представляет обобщение той, которой посвящены первые параграфы мемуара «Новые приложения непрерывных дробей».

Если числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

заданы совершенно произвольно, требования нашей задачи могут противоречить друг другу.

Чтобы избежать противоречия, можно предположить, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определяются равенствами

$$\alpha_1 = \int_a^b F(z)\lambda_1(z)\,dz, \quad \alpha_2 = \int_a^b F(z)\lambda_2(z)\,dz, \quad \ldots,$$

$$\alpha_n = \int_a^b F(z)\lambda_n(z)\,dz,$$

причём данная функция $F(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$c \leqslant F(z) \leqslant C$$

на всём промежутке от $z=a$ до $z=b$.

Впрочем, следует исключить те функции $F(z)$, для которых весь промежуток, от $z=a$ до $z=b$, делится на n или меньшее число таких частей, что на каждой из них $F(z)$ сохраняет постоянно одно и то же значение c или C.

Причина необходимости исключения таких функций $F(z)$ состоит в том, что для них условия

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)\,dz = \int_a^b F(z)\lambda_1(z)\,dz, \quad \ldots,$$

$$\int_a^b f(z)\lambda_n(z)\,dz = \int_a^b F(z)\lambda_n(z)\,dz$$

вместе с неравенствами

$$c \leqslant f(z) \leqslant C$$

влекут за собой равенство

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz = \int_a^b F(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz,$$

как выяснится из дальнейшего.

11 Зак. 1254. А. А. Марков.

При указанных ограничениях поставленный нами вопрос о предельных величинах интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

сводится к тем уравнениям, которые мы установим.

Рассмотрим сначала простейшие случаи:

$$n=1 \text{ и } n=2.$$

При $n=1$ для решения задачи надо определить числа η и ξ по условиям

$$C\int_a^\eta \lambda_1(z)\,dz + c\int_\eta^b \lambda_1(z)\,dz = \alpha_1 =$$
$$= c\int_a^\xi \lambda_1(z)\,dz + C\int_\xi^b \lambda_1(z)\,dz.$$

Эти условия выполнимы и определяют действительно числа η и ξ; так как при непрерывном возрастании переменного числа x от a до b сумма

$$C\int_a^x \lambda_1(z)\,dz + c\int_x^b \lambda_1(z)\,dz$$

возрастает непрерывно

$$\text{от } c\int_a^b \lambda_1(z)\,dz \quad \text{до } C\int_a^b \lambda_1(z)\,dz,$$

а сумма

$$c\int_a^x \lambda_1(z)\,dz + C\int_x^b \lambda_1(z)\,dz$$

убывает также непрерывно

$$\text{от } C\int_a^b \lambda_1(z)\,dz \quad \text{до } c\int_a^b \lambda_1(z)\,dz,$$

и, кроме того, имеем

$$c\int_a^b \lambda_1(z)\,dz \leqslant \int_a^b F(z)\lambda_1(z)\,dz \leqslant C\int_a^b \lambda_1(z)\,dz.$$

По числам η и ξ образуем две функции $f_{\min}$ и $f_{\max}$ переменного числа z:

$$f_{\min} = C \text{ при } a < z < \eta,\ f_{\min} = c \text{ при } \eta < z < b$$

и

$$f_{\max} = c \text{ при } a < z < \xi,\ f_{\max} = C \text{ при } \xi < z < b.$$

Тогда

$$\int_a^b f_{\min}\lambda_2(z)\,dz = C\int_a^\eta \lambda_2(z)\,dz + c\int_\eta^b \lambda_2(z)\,dz$$

и

$$\int_a^b f_{\max}\lambda_2(z)\,dz = c\int_a^\xi \lambda_2(z)\,dz + C\int_\xi^b \lambda_2(z)\,dz$$

будут представлять искомые, наименьшее и наибольшее значения интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz,$$

что обнаруживается следующими формулами:

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz - \int_a^b f_{\min}\lambda_2(z)\,dz = \int_a^b \{f(z) - f_{\min}\}\lambda_2(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1(\eta)}\int_a^b \{f(z) - f_{\min}\}\begin{vmatrix}\lambda_1(\eta), & \lambda_1(z)\\ \lambda_2(\eta), & \lambda_2(z)\end{vmatrix} dz$$

и

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz-\int_a^b f_{\max}\lambda_2(z)\,dz=\int_a^b \{f(z)-f_{\max}\}\lambda_2(z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{\lambda_1(\xi)}\int_a^b \{f(z)-f_{\max}\}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1(\xi), & \lambda_1(z)\\ \lambda_2(\xi), & \lambda_2(z)\end{vmatrix}dz.$$

Переходя к случаю

$$n=2,$$

введём сначала переменное число η'', ограниченное неравенствами

$$a<\eta''<\eta,$$

где η означает только что определённое число.

Каждому значению переменного числа η'' будет соответствовать определённое значение другого переменного числа ξ'', которое удовлетворяет неравенствам

$$\eta''<\xi''<b$$

и условию

$$C\int_a^{\eta''}\lambda_1(z)\,dz+c\int_{\eta''}^{\xi''}\lambda_1(z)\,dz+C\int_{\xi''}^{b}\lambda_1(z)\,dz=\alpha_1,$$

где α_1 имеет прежнее значение.

Существование числа ξ'' вытекает из предыдущего исследования, так как ξ'', можно сказать, решает задачу о наибольшей величине интеграла

$$\int_{\eta''}^{b} f(z)\lambda_2(z)\,dz$$

при условиях

$$c\leqslant f(z)\leqslant C \text{ и } \int_{\eta''}^{b} f(z)\lambda_1(z)\,dz=\int_{\eta''}^{b} f_{\min}\lambda_1(z)\,dz,$$

где $f_{\min}$ означает вышеопределённую функцию, т. е. $f_{\min}=C$ при $\eta''<z<\eta$ и $f_{\min}=c$ при $\eta<z<b$.

Из установленной нами зависимости между ξ'' и η'' вытекает следующее соотношение между дифференциалами этих переменных:

$$\lambda_1(\xi'')\,d\xi''=\lambda_1(\eta'')\,d\eta''.$$

Отсюда следует, что при непрерывном возрастании η'' число ξ'' также возрастает непрерывно.

Нетрудно также видеть, что значениям a и η числа η'' соответствуют значения ξ и b числа ξ''.

После этих замечаний составим выражение

$$C\int\limits_a^{\eta''}\lambda_2(z)\,dz+c\int\limits_{\eta''}^{\xi''}\lambda_2(z)\,dz+C\int\limits_{\xi''}^{b}\lambda_2(z)\,dz-\alpha_2,$$

которое назовём $\chi(\eta'')$.

При непрерывном возрастании η'' от a до η функция $\chi(\eta'')$ непрерывно убывает, так как

$$\lambda_1(\xi'')\frac{d\chi(\eta'')}{d\eta''}=(c-C)\begin{vmatrix}\lambda_1(\eta'') & \lambda_1(\xi'')\\ \lambda_2(\eta'') & \lambda_2(\xi'')\end{vmatrix}<0.$$

С другой стороны, из решения нашей задачи для случая $n=1$ нетрудно заключить, что $\chi(a)$ — число положительное, а $\chi(\eta)$, напротив, — отрицательное:

$$\chi(a)=c\int\limits_a^{\xi}\lambda_2(z)\,dz+C\int\limits_{\xi}^{b}\lambda_2(z)\,dz-\int\limits_a^{b}F(z)\lambda_2(z)\,dz>0$$

и

$$\chi(\eta)=C\int\limits_a^{\eta}\lambda_2(z)\,dz+c\int\limits_{\eta}^{b}\lambda_2(z)\,dz-\int\limits_a^{b}F(z)\lambda_2(z)\,dz<0.$$

Следовательно, в промежутке

от $\eta''=a$ до $\eta''=\eta$

должно быть одно и только одно значение η'', обращающее $\chi(\eta'')$ в нуль.

Таким образом, мы убеждаемся, что существует одна и только одна совокупность значений η'', ξ'', удовлетворяющая двум условиям:

$$C\int_a^{\eta''}\lambda_1(z)\,dz+c\int_{\eta''}^{\xi''}\lambda_1(z)\,dz+C\int_{\xi''}^{b}\lambda_1(z)\,dz=\alpha_1$$

и

$$C\int_a^{\eta''}\lambda_2(z)\,dz+c\int_{\eta''}^{\xi''}\lambda_2(z)\,dz+C\int_{\xi''}^{b}\lambda_2(z)\,dz=\alpha_2.$$

Эти значения определяют такую функцию $f_{\max}$ переменного числа z: $f_{\max}=c$ при $\eta''<z<\xi''$ и $f_{\max}=C$ при прочих значениях z, которой соответствует, при наших условиях, наибольшая величина интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)\,dz.$$

В самом деле, из равенств

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)\,dz=\int_a^b f_{\max}\lambda_1(z)\,dz$$

и

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz=\int_a^b f_{\max}\lambda_2(z)\,dz$$

вытекает следующее:

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)\,dz-\int_a^b f_{\max}\lambda_3(z)\,dz=$$

$$=\frac{\displaystyle\int_a^b\{f(z)-f_{\max}\}\begin{vmatrix}\lambda_1(\eta'') & \lambda_1(\xi'') & \lambda_1(z)\\ \lambda_2(\eta'') & \lambda_2(\xi'') & \lambda_2(z)\\ \lambda_3(\eta'') & \lambda_3(\xi'') & \lambda_3(z)\end{vmatrix}dz}{\begin{vmatrix}\lambda_1(\eta'') & \lambda_1(\xi'')\\ \lambda_2(\eta'') & \lambda_2(\xi'')\end{vmatrix}},$$

которое обнаруживает, что при наших условиях разность

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)\,dz - \int_a^b f_{\max}\lambda_3(z)\,dz$$

— число отрицательное.

Затем, при помощи рассуждений, подобных предыдущим, нетрудно убедиться в существовании двух других чисел ξ' и η', которые удовлетворяют уравнениям

$$c\int_a^{\xi'}\lambda_1(z)\,dz + C\int_{\xi'}^{\eta'}\lambda_1(z)\,dz + c\int_{\eta'}^{b}\lambda_1(z)\,dz = \alpha_1,$$

$$c\int_a^{\xi'}\lambda_2(z)\,dz + C\int_{\xi'}^{\eta'}\lambda_2(z)\,dz + c\int_{\eta'}^{b}\lambda_2(z)\,dz = \alpha_2$$

и неравенствам

$$a < \xi' < \xi, \quad \eta < \eta' < b.$$

Если же мы положим $f_{\min} = C$ при $\xi' < z < \eta'$ и $f_{\min} = c$ при прочих значениях z, то такой функции $f_{\min}$ будет соответствовать, при наших условиях, наименьшее значение интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)\,dz.$$

В справедливости этого заключения нас убеждает формула

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)\,dz - \int_a^b f_{\min}\lambda_3(z)\,dz =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_a^b \{f(z) - f_{\min}\}\begin{vmatrix}\lambda_1(\xi') & \lambda_1(\eta') & \lambda_1(z)\\ \lambda_2(\xi') & \lambda_2(\eta') & \lambda_2(z)\\ \lambda_3(\xi') & \lambda_3(\eta') & \lambda_3(z)\end{vmatrix} dz}{\begin{vmatrix}\lambda_1(\xi') & \lambda_1(\eta')\\ \lambda_2(\xi') & \lambda_2(\eta')\end{vmatrix}}.$$

Заметим, что из приведённых и намеченных нами рассуждений вытекают неравенства

$$\xi' < \xi < \xi'', \quad \eta' > \eta > \eta''.$$

От случая $n=2$ можно перейти к случаю $n=3$; но вместо этого частного перехода мы рассмотрим общий переход от одного значения n к значению, большему на единицу.

§ 4. Для определённости положим, что наша задача решена при чётном числе ($2m$) данных:

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)\,dz = a_1, \ldots, \quad \int_a^b f(z)\lambda_{2m}(z)\,dz = a_{2m}.$$

Пусть, согласно замеченному при двух данных, функции $f_{\max}$ и $f_{\min}$, дающие искомые предельные величины интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+1}(z)\,dz,$$

определены условиями:

$$f_{\max} = C \text{ при}$$
$$a < z < \eta_1'', \; \xi_1'' < z < \eta_2'', \; \ldots, \; \xi_{m-1}'' < z < \eta_m'', \; \xi_m'' < z < b,$$
$$f_{\max} = c \text{ при}$$
$$\eta_1'' < z < \xi_1'', \quad \eta_2'' < z < \xi_2'', \quad \ldots, \quad \eta_m'' < z < \xi_m'',$$
$$f_{\min} = C \text{ при}$$
$$\xi_1' < z < \eta_1', \quad \xi_2' < z < \eta_2', \quad \ldots, \quad \xi_m' < z < \eta_m',$$
$$f_{\min} = c \text{ при}$$
$$a < z < \xi_1', \; \eta_1' < z < \xi_2', \; \ldots, \; \eta_{m-1}' < z < \xi_m', \; \eta_m' < z < b,$$

причём, конечно,

$$a < \eta_1'' < \xi_1'' < \eta_2'' < \ldots < \xi_{m-1}'' < \eta_m'' < \xi_m'' < b$$

и

$$a < \xi_1' < \eta_1' < \xi_2' < \ldots < \eta_{m-1}' < \xi_m' < \eta_m' < b.$$

Введём затем переменное число x'', лежащее между a и ξ'_1, и для каждого значения этого переменного определим числа

$$y''_1,\ x''_1,\ y''_2,\ x''_2,\ \ldots,\ y''_m,\ x''_m$$

так, чтобы функция $f(z)$, которая сохраняет постоянное значение C при

$$x'' < z < y''_1,\ x''_1 < z < y''_2,\ \ldots,\ x''_{m-1} < z < y''_m,\ x''_m < z < b$$

и значение c при

$$y''_1 < z < x''_1,\ y''_2 < z < x''_2,\ \ldots,\ y''_m < z < x''_m,$$

давала решение вопроса о наибольшей величине интеграла

$$\int_{x''}^{b} f(z)\,\lambda_{2m+1}(z)\,dz$$

при условиях

$$c \leqslant f(z) \leqslant C$$

и

$$\int_{x''}^{b} f(z)\,\lambda_i(z)\,dz = \int_{x''}^{b} f_{\min}\,\lambda_i(z)\,dz,$$

где

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2m,$$

а $f_{\min}$ означает вышеопределённую функцию.

Другими словами, числа

$$y''_1,\ x''_1,\ y''_2,\ x''_2,\ \ldots,\ y''_m,\ x''_m$$

мы определяем уравнениями

$$c\int_{a}^{x''} \lambda_i(z)\,dz + C\int_{x''}^{y''_1} \lambda_i(z)\,dz + \ldots + C\int_{x''_m}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i$$

при

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 2m;$$

согласно сделанному нами допущению и предыдущему объяснению эта система $2m$ уравнений при всяком данном значении x'', лежащем между a и ξ_1', не заключает в себе ни неопределённости, ни противоречия.

Отсюда посредством дифференцирования выводим

$$\lambda_i(x'')\,dx'' - \lambda_i(y_1'')\,dy_1'' + \lambda_i(x_1'')\,dx_1'' - \ldots + \lambda_i(x_m'')\,dx_m'' = 0,$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Поэтому дифференциалы

$$dx'', \; dy_1'', \; dx_1'', \; dy_2'', \; \ldots, \; dx_m''$$

соответственно пропорциональны определителям тех систем $(2m)^2$ элементов, которые получаются из одной

$$\begin{array}{l} \lambda_1(x''), \; \lambda_1(y_1''), \; \lambda_1(x_1''), \; \ldots, \; \lambda_1(y_m''), \; \lambda_1(x_m''), \\ \lambda_2(x''), \; \lambda_2(y_1''), \; \lambda_2(x_1''), \; \ldots, \; \lambda_2(y_m''), \; \lambda_2(x_m''), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{2m}(x''), \; \lambda_{2m}(y_1''), \; \ldots\ldots\ldots, \lambda_{2m}(y_m''), \lambda_{2m}(x_m'') \end{array}$$

вычёркиванием: первого столбца, второго столбца, третьего столбца и т. д.

В силу теоремы 1 мы убеждаемся, таким образом, что при непрерывном возрастании переменного x'' все числа

$$y_1'', \; x_1'', \; y_2'', \; \ldots, \; y_m'', \; x_m''$$

также возрастают непрерывно.

При $x'' = a$ они будут

$$y_1'' = \eta_1'', \; x_1'' = \xi_1'', \; y_2'' = \eta_2'', \; \ldots, \; y_m'' = \eta_m'', \; x_m'' = \xi_m'';$$

если же $x'' = \xi_1'$, то

$$y_1'' = \eta_1', \; x_1'' = \xi_2', \; y_2'' = \eta_2', \; \ldots, \; y_m'' = \eta_m', \; x_m'' = b.$$

Следовательно, при

$$a < x'' < \xi_1'$$

должно быть

$$\eta_1'' < y'' < \eta_1', \; \xi_1'' < x_1'' < \xi_2', \; \eta_2'' < y_2'' < \eta_2', \; \ldots, \; \xi_m'' < x_m'' < b.$$

Установив это, возьмём сумму

$$c\int_{a}^{x''}\lambda_{2m+1}(z)\,dz + C\int_{x''}^{y_1''}\lambda_{2m+1}(z)\,dz + \ldots + C\int_{x_m''}^{b}\lambda_{2m+1}(z)\,dz,$$

которую назовём $\chi(x'')$.

При непрерывном возрастании x'', от a до ξ_1', последняя сумма непрерывно убывает, что обнаруживает нам формула

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(y_1'') & \lambda_1(x_1'') & \ldots & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(y_1'') & \lambda_2(x_1'') & \ldots & \lambda_2(x_m'') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{2m}(y_1'') & \lambda_{2m}(x_1'') & \ldots & \lambda_{2m}(x_m'') \end{vmatrix} \frac{d\chi(x'')}{dx''} =$$

$$= \{c - C\} \begin{vmatrix} \lambda_1(x'') & \lambda_1(y_1'') & \ldots & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(x'') & \lambda_2(y_1'') & \ldots & \lambda_2(x_m'') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{2m}(x'') & \lambda_{2m}(y_1'') & \ldots & \lambda_{2m}(x_m'') \\ \lambda_{2m+1}(x'') & \ldots & & \lambda_{2m+1}(x_m'') \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, имеем

$$\chi(a) = \int_a^b f_{\max}\lambda_{2m+1}(z)\,dz > \alpha_{2m+1}$$

и

$$\chi(\xi_1') = \int_a^b f_{\min}\lambda_{2m+1}(z)\,dz < \alpha_{2m+1}.$$

Следовательно, в промежутке

$$\text{от } x'' = a \text{ до } x'' = \xi_1'$$

должно быть одно и только одно значение x'', которому соответствует величина $\chi(x'')$, равная α_{2m+1}.

Итак, существует система чисел

$$x'',\ y_1'',\ x_1'',\ y_2'',\ \ldots,\ x_{m-1}'',\ y_m'',\ x_m'',$$

которая определяется неравенствами

$$a < x'' < \xi_1',\ \eta_1'' < y_1'' < \eta_1',\ \xi_1'' < x_1'' < \xi_2', \ldots,$$
$$\eta_m'' < y_m'' < \eta_m',\ \xi_m'' < x_m'' < b$$

и уравнениями

$$c\int\limits_a^{x''} \lambda_i(z)\,dz + C\int\limits_{x''}^{y_1''} \lambda_i(z)\,dz + c\int\limits_{y_1''}^{x_1''} \lambda_i(z)\,dz + \ldots$$
$$\ldots + C\int\limits_{x_m''}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i,$$

где

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2m,\ 2m+1.$$

Этим числам соответствует функция $f_{\max}$, равная C при

$$x'' < z < y_1'',\ x_1'' < z < y_2'',\ \ldots,\ x_{m-1}'' < z < y_m'',$$
$$x_m'' < z < b$$

и равная c при

$$a < z < x'',\ y_1'' < z < x_1'',\ \ldots,\ y_{m-1}'' < z < x_{m-1}'',$$
$$y_m'' < z < x_m'',$$

которая даёт решение поставленного нами вопроса о наибольшей величине интеграла

$$\int\limits_a^b f(z)\,\lambda_{2m+2}(z)\,dz,$$

так как при наших условиях

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x'') & \lambda_1(y_1'') & \lambda_1(x_1'') & \ldots & \lambda_1(y_m'') & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(x'') & \lambda_2(y_1'') & \lambda_2(x_1'') & \ldots & \lambda_2(y_m'') & \lambda_2(x_m'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{2m+1}(x'') & \lambda_{2m+1}(y_1'') & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_{2m+1}(x_m'') \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)\,dz - \\ - \int\limits_a^b f_{\max}\lambda_{2m+2}(z)\,dz \end{array} \right\} = \int\limits_a^b \{f(z) - f_{\max}\} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \lambda_1(x'') & \lambda_1(y_1'') & \ldots & \lambda_1(x_m'') & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(x'') & \lambda_2(y_1'') & \ldots & \lambda_2(x_m'') & \lambda_2(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{2m+2}(x'') & \lambda_{2m+2}(y_1'') & \ldots & \lambda_{2m+2}(x_m'') & \lambda_{2m+2}(z) \end{vmatrix} dz.$$

Подобным же образом решается вопрос о наименьшей величине интеграла

$$\int\limits_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)\,dz.$$

Именно, нетрудно убедиться в существовании чисел

$$y',\ x_1',\ y_1',\ x_2',\ \ldots,\ y_{m-1}',\ x_m',\ y_m',$$

определяемых неравенствами

$$a < y' < \eta_1'',\ \xi_1' < x_1' < \xi_1'',\ \eta_1' < y_1' < \eta_2'',\ \ldots,$$

$$\xi < x_m' < \xi_m'',\ \eta_m' < y_m' < b$$

и уравнениями

$$C\int_a^{y'} \lambda_i(z)\,dz + c\int_{y'}^{x_1'} \lambda_i(z)\,dz + C\int_{x_1'}^{y_1'} \lambda_i(z)\,dz + \ldots$$

$$\ldots + c\int_{y_m'}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i$$

при $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m+1$.

Этим числам соответствует функция $f_{\min}$, равная C при

$$a < z < y', \quad x_1' < z < y_1', \quad x_2' < z < y_2', \quad \ldots, \quad x_m' < z < y_m',$$

и равная c при

$$y' < z < x_1', \quad y_1' < z < x_2', \quad \ldots, \quad y_{m-1}' < z < x_m', \quad y_m' < z < b,$$

которая даёт искомую нами наименьшую величину интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_{2m+2}(z)\,dz.$$

Заметим, что приведённые нами рассуждения устанавливают также неравенства

$$x'' < \xi_1' < x_1' < \xi_1'' < x_1'' < \xi_2' < x_2' < \xi_2'' < \ldots$$
$$\ldots < \xi_m' < x_m' < \xi_m'' < x_m''$$

и

$$y' < \eta_1'' < y_1'' < \eta_1' < y_1' < \eta_2'' < y_2'' < \eta_2' < \ldots$$
$$\ldots < \eta_m'' < y_m'' < \eta_m' < y_m'.$$

Мы рассмотрели переход от чётного числа данных к нечётному, большему на единицу.

На переходе от нечётного числа данных к чётному, бо́льшему на единицу, мы не будем останавливаться: этот переход не представляет никаких новых затруднений.

После всего сказанного нам уже нетрудно убедиться в правильности следующего заключения.

При данных

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz=a_1, \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz=a_2, \ldots, \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz=a_n$$

и условии

$$c \leqslant f(z) \leqslant C$$

предельные величины интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

соответствуют таким функциям $f_{\max}$ и $f_{\min}$, для каждой из которых весь промежуток

$$\text{от } z=a \quad \text{до } z=b$$

делится на $n+1$ частей, где она сохраняет постоянное значение c или C.

Функция $f_{\max}$, для которой интеграл

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

достигает своей наибольшей величины, равна C при всех значениях z, достаточно близких к b.

Напротив, функция $f_{\min}$, для которой интеграл

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

достигает своей наименьшей величины, равна c при всех значениях z, достаточно близких к b.

Надо помнить наше предположение о способе задания чисел a.

В силу этого предположения наши условия не заключают в себе никаких противоречий и не могут быть удовлетворены такой функцией $f(z)$, для которой весь промежуток, от $z=a$ до $z=b$, делится на n или меньшее число частей, где она сохраняет постоянное значение.

§ 5. Обращаясь к другой задаче, прибавим к данным числам a и b ещё третье, промежуточное, число v $(a<v<b)$ и к функциям

$$\lambda_1(z),\ \lambda_2(z),\ \ldots,\ \lambda_n(z)$$

прибавим ещё одну данную функцию $\Omega(z)$, удовлетворяющую неравенствам

$$\Omega(z)\geqslant 0,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) \\ \Omega(z) & \Omega'(z) \end{vmatrix} \geqslant 0,\ \ldots$$

$$\ldots,\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \ldots & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n(z) & \lambda_n'(z) & \ldots & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z) & \Omega'(z) & \ldots & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

на всём промежутке от $z=a$ до $z=b$.

Наша вторая задача состоит в определении наибольшей и наименьшей величин интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

при прежних данных

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)\,dz=\alpha_1,\quad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz=\alpha_2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \int_a^b f(z)\lambda_n(z)\,dz=\alpha_n$$

и условии

$$c\leqslant f(z)\leqslant C.$$

Для выяснения того, как можно решать эту задачу, рассмотрим частный случай

$$n = 3,$$

причём ограничимся разысканием наименьшей величины нашего интеграла.

Предыдущими рассуждениями мы выяснили существование чисел

$$x'',\ y_1'',\ x_1'',\ y',\ x_1',\ y_1',$$

удовлетворяющих неравенствам

$$a < x'' < x_1' < x_1'' < b,\quad a < y' < y_1'' < y_1' < b$$

и условиям

$$C\int\limits_a^{y'} \lambda_i(z)\,dz + c\int\limits_{y'}^{x_1'} \lambda_i(z)\,dz + {}$$

$$+ C\int\limits_{x_1'}^{y_1'} \lambda_i(z)\,dz + c\int\limits_{y_1'}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i,$$

$$c\int\limits_a^{x''} \lambda_i(z)\,dz + C\int\limits_{x''}^{y_1''} \lambda_i(z)\,dz + {}$$

$$+ c\int\limits_{y_1''}^{x''} \lambda_i(z)\,dz + C\int\limits_{x_1''}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i$$

при $i = 1,\ 2,\ 3$.

Относительно числа v мы различим два случая:

1) v лежит между a и x'' или между x_1' и x_1'',

2) v лежит между x'' и x_1' или между x_1'' и b.

Рассмотрим сначала первый случай.

Вводим переменное число x, лежащее между a и x'', и определяем его функции

$$y, \ x_1, \ y_1$$

условиями

$$c\int_a^x \lambda_i(z)\,dz + C\int_x^y \lambda_i(z)\,dz + c\int_y^{x_1} \lambda_i(z)\,dz +$$
$$+ C\int_{x_1}^{y_1} \lambda_i(z)\,dz + c\int_{y_1}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i$$

при $i = 1, 2, 3$.

При непрерывном возрастании x от a до x'' число x_1 возрастает также непрерывно от x_1' до x_1''.

Следовательно, при некотором значении x одно из двух чисел x и x_1 совпадает с v.

Придав x значение, удовлетворяющее условию

$$x = v \text{ или } x_1 = v,$$

составим функцию $f_v(z)$, которая равна c для всех значений z, лежащих в промежутках

от a до x, от y до x_1 и от y_1 до b,

и равна C для прочих значений z. Тогда

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz$$

будет представлять искомую нами наименьшую величину интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz.$$

При $a < v < x''$ это утверждение не подлежит сомнению, так как

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz$$

обращается тогда в произведение

$$c\int_a^v \Omega(z)\,dz.$$

Если же

$$x_1' < v < x_1'',$$

то для доказательства верности нашего утверждения введём функцию

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + p_3\lambda_3(z),$$

коэффициенты которой

$$p_1,\ p_2,\ p_3$$

определены условиями

$$\Phi(x) = \Omega(x),\quad \Phi(y) = \Omega(y),\quad \Phi(y_1) = 0.$$

В силу теоремы 2 имеем:

$$\begin{array}{lll}
\Phi(z) < \Omega(z) & \text{при} & a < z < x, \\
\Phi(z) > \Omega(z) & \text{»} & x < z < y, \\
\Phi(z) < \Omega(z) & \text{»} & y < z < x_1 = v, \\
\Phi(z) > 0 & \text{»} & x_1 < z < y_1, \\
\Phi(z) < 0 & \text{»} & y_1 < z < b,
\end{array}$$

и потому неравенство

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz < \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

является простым следствием формулы

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz - \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz =$$

$$= \int_a^v \{f_v(z) - f(z)\}\,\{\Omega(z) - \Phi(z)\}\,dz -$$

$$- \int_v^b \{f_v(z) - f(z)\}\,\Phi(z)\,dz.$$

Предположим теперь

$$x'' < v < x_1' \text{ или } x_1'' < v < b.$$

В этом случае мы введём переменное число y, лежащее между a и y', и определим три его функции

$$x,\ y_1,\ x_1$$

условиями

$$C\int_a^y \lambda_i(z)\,dz + c\int_y^x \lambda_i(z)\,dz + C\int_x^{y_1} \lambda_i(z)\,dz +$$
$$+ c\int_{y_1}^{x_1} \lambda_i(z)\,dz + C\int_{x_1}^b \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i,$$

где $i = 1,\ 2,\ 3$.

При непрерывном возрастании y, от a до y', числа x и x_1 также возрастают непрерывно: первое от x'' до x_1', второе — от x_1'' до b.

Следовательно, одно из двух чисел

$$x \text{ и } x_1$$

можно сделать равным v.

Распорядившись произвольностью числа y так, чтобы было

$$x = v \quad \text{или} \quad x_1 = v,$$

полагаем

$$f_v(z) = C \text{ при } a < z < y,\ x < z < y_1,\ x_1 < z < b$$

и

$$f_v(z) = c \text{ при } y < z < x,\ y_1 < z < x_1.$$

Тогда

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz$$

будет представлять искомую наименьшую величину интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz.$$

В этом убеждает нас следующая формула:

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz - \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz =$$

$$= \int_u^v \{f_v(z) - f(z)\}\{\Omega(z) - \Phi(z)\}\,dz -$$

$$- \int_v^b \{f_v(z) - f(z)\}\,\Phi(z)\,dz,$$

где $\Phi(z)$ означает выражение

$$p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + p_3\lambda_3(z),$$

коэффициенты p_1, p_2, p_3 которого определяются условиями

$$\Phi(y) = \Omega(y), \quad \Phi(x) = \Omega(x) \quad \text{и} \quad \Phi(y_1) = \Omega(y_1),$$

если $x_1 = v$, и условиями

$$\Phi(y) = \Omega(y), \quad \Phi(y_1) = \Phi(x_1) = 0,$$

если $x = v$.

Подобным же образом можно было бы рассмотреть и вопрос о наибольшей величине интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

при тех же трёх данных.

Но на этом мы не остановимся, а перейдём к общим соображениям.

§ 6. Для определённости остановимся на вопросе о наибольшей величине интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

и будем считать число (n) наших данных чётным:

$$n = 2m.$$

Затем, пользуясь обозначениями § 4, различим два случая:

1) v лежит в одном из промежутков от a до η_1'', от η_1' до η_2'', от η_2' до η_3'', ..., от η_m' до b;

2) v лежит в одном из промежутков от η_1'' до η_1', от η_2'' до η_2', от η_3'' до η_3', ..., от η_m'' до η_m'.

Останавливаясь на первом из этих двух случаев, введём в рассмотрение переменное число y, лежащее между a и η_1'', и его функции

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \ldots,\ x_m,\ y_m,$$

которые определяются уравнениями

$$C\int_a^y \lambda_i(z)\,dz + c\int_y^{x_1} \lambda_i(z)\,dz + \ldots$$

$$\ldots + C\int_{x_m}^{y_m} \lambda_i(z)\,dz + c\int_{y_m}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i$$

при $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Существование таких функций установлено рассуждениями § 4.

Из тех же рассуждений можно заключить, что при непрерывном возрастании числа y, от a до η_1'', числа

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$$

также возрастают непрерывно: число y_1 — от η_1' до η_2'', число y_2 — от η_2' до η_3'' и т. д., наконец, число y_m — от η_m' до b.

Следовательно, можно распорядиться величиной y так, что одно из чисел

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$$

будет равно v.

Придав y такое значение, чтобы одно из чисел

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$$

обратилось в v, положим

$$f_v(z) = C \text{ при } a < z < y,\ x_1 < z < y_1,$$
$$x_2 < z < y_2,\ \ldots,\ x_m < z < y_m$$

и

$$f_v(z) = c \text{ при } y < z < x_1,\ y_1 < z < x_2,$$
$$y_2 < z < x_3,\ \ldots,\ y_m < z < b.$$

Тогда

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz$$

будет представлять искомую наибольшую величину интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz.$$

Чтобы в этом убедиться, положим

$$v = y_k$$

и рассмотрим выражение

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{2m}\lambda_{2m}(z),$$

коэффициенты которого

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{2m}$$

определены из системы $2m$ уравнений

$$\Phi(y)=\Omega(y),\quad \Phi(x_1)=\Omega(x_1),$$
$$\Phi(y_1)=\Omega(y_1),\quad \ldots,\quad \Phi(x_k)=\Omega(x_k),$$
$$\Phi(x_{k+1})=0,\quad \Phi(y_{k+1})=0,\quad \ldots,\quad \Phi(x_m)=0,\quad \Phi(y_m)=0.$$

В силу теоремы 2 составленное нами выражение $\Phi(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\Phi(z)\leqslant\Omega(z)$$

при всех значениях z, лежащих в одном из промежутков: от a до y, от x_1 до y_1, от x_2 до $y_2, \ldots$, от x_k до y_k; напротив, для значений z, лежащих в одном из промежутков: от y до x_1, от y_1 до x_2, от y_2 до x_3, ..., от y_{k-1} до x_k, должно быть

$$\Phi(z)\geqslant\Omega(z).$$

Далее, в силу той же теоремы

$$\Phi(z)\geqslant 0,$$

когда z лежит в одном из промежутков: от y_k до x_{k+1}, от y_{k+1} до $x_{k+2}, \ldots$, от y_m до b, и

$$\Phi(z)\leqslant 0,$$

когда z лежит в одном из промежутков: от x_{k+1} до y_{k+1}, от x_{k+2} до $y_{k+2}, \ldots$, от x_m до y_m.

Поэтому из формулы

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz-\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz=$$
$$=\int_a^v \{f_v(z)-f(z)\}\,\{\Omega(z)-\Phi(z)\}\,dz-$$
$$-\int_v^b \{f_v(z)-f(z)\}\,\Phi(z)\,dz$$

вытекает неравенство

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz > \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz,$$

которое мы и желали доказать.

Обращаясь к тому случаю, когда v лежит в одном из промежутков: от η_1'' до η_1', от η_2'' до η_2', ..., от η_m'' до η_m', введём систему переменных чисел

$$x,\ y_1,\ x_1,\ y_2,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ y_m,$$

которые удовлетворяют неравенствам

$$a < x < \xi_1',\ \eta_1'' < y_1 < \eta_1',\ \xi_1'' < x_1 < \xi_2',$$
$$\eta_2'' < y_2 < \eta_2',\ \ldots,\ \xi_m'' < x_m < b$$

и уравнениям

$$c\int_a^x \lambda_i(z)\,dz + C\int_x^{y_1} \lambda_i(z)\,dz + c\int_{y_1}^{x_1} \lambda_i(z)\,dz + \ldots$$
$$\ldots + C\int_{x_m}^{b} \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i$$

при $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Согласно объяснениям § 4, если переменное x возрастает непрерывно от a до ξ_1', то переменные

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$$

возрастают также непрерывно: y_1 — от η_1'' до η_1', y_2 — от η_2'' до η_2' и т. д., наконец, y_m — от η_m'' до η_m'.

Следовательно, одно из чисел

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$$

может быть сделано равным v, после чего все числа

$$x,\ y_1,\ x_1,\ y_2,\ x_2,\ \ldots,\ y_m,\ x_m$$

получат вполне определённые значения.

Придав числам

$$x,\ y_1,\ x_1,\ y_2,\ x_2,\ \ldots,\ y_m,\ x_m$$

эти определённые значения, которые удовлетворяют одному из уравнений

$$y_1 = v,\ y_2 = v,\ \ldots,\ y_m = v,$$

положим

$$f_v(z) = C \text{ при } x < z < y_1,\ x_1 < z < y_2,\ \ldots$$
$$\ldots, x_{m-1} < z < y_m,\ x_m < z < b$$

и

$$f_v(z) = c \text{ при } a < z < x,\ y_1 < z < x_1,\ \ldots$$
$$\ldots, y_{m-1} < z < x_{m-1},\ y_m < z < x_m.$$

Тогда

$$\int_a^v f_v(z)\, \Omega(z)\, dz$$

будет представлять искомую наибольшую величину интеграла

$$\int_a^v f(z)\, \Omega(z)\, dz.$$

В этом нетрудно убедиться: стоит только повторить те рассуждения, которые были уже указаны для ранее рассмотренного случая.

Избегая лишних повторений, мы считаем возможным высказать, на основании приведённых соображений, общее заключение.

При данных

$$\int_a^b f(z)\, \lambda_1(z)\, dz = \alpha_1,\quad \int_a^b f(z)\, \lambda_2(z)\, dz = \alpha_2, \ldots$$
$$\ldots,\quad \int_a^b f(z)\, \lambda_n(z)\, dz = \alpha_n$$

и условии

$$c \leqslant f(z) \leqslant C$$

предельные величины интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

соответствуют таким двум функциям $f(z)$, для каждой из которых весь промежуток

$$\text{от } z = a \text{ до } z = b$$

делится на $n + 2$ частей, где она сохраняет постоянное значение c или C.

Кроме того, для одной из этих двух функций должно быть

$$f(v - \varepsilon) = c \quad \text{и} \quad f(v + \varepsilon) = C,$$

а для другой

$$f(v - \varepsilon) = C \quad \text{и} \quad f(v + \varepsilon) = c,$$

где ε означает бесконечно малое положительное число.

Первая даёт наименьшую, а вторая наибольшую величину рассматриваемого интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz.$$

При решении вопроса о предельной величине интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

мы предполагали, что v не совпадает ни с одним из тех значений переменного числа z, которые служат границей между значениями C и c той или другой из двух функций

$f_{\min}$ и $f_{\max}$, соответствующих при наших условиях наименьшей и наибольшей величине интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_{n+1}(z)\,dz.$$

Если же при непрерывном переходе z через значение v та или другая из функций $f_{\min}$ и $f_{\max}$ меняет значение, то одной из двух предельных величин интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

будет

$$\int_a^v f_{\min}\,\Omega(z)\,dz \quad \text{или} \quad \int_a^v f_{\max}\,\Omega(z)\,dz.$$

Для доказательства можно воспользоваться вышеуказанным приёмом, только выражение $\Phi(z)$ надо составить не из n, а из $n-1$ членов, т. е. следует положить

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{n-1}\,\lambda_{n-1}(z).$$

Далее заметим, что к числу функций $\Omega(z)$, удовлетворяющих поставленным нами условиям, принадлежит функция

$$\lambda_1(z).$$

Ввиду этих замечаний, сохраняя обозначения § 4, мы можем установить неравенства

$$C\int_a^{\eta_1''} \lambda_1(z)\,dz + c\int_{\eta_1''}^{\xi_1''} \lambda_1(z)\,dz + \ldots$$

$$\ldots + C\int_{\xi_{i-1}''}^{\eta_i''} \lambda_1(z)\,dz > \int_a^{\eta_i''} f(z)\,\lambda_1(z)\,dz,$$

$$C\int_a^{\eta_1''}\lambda_1(z)\,dz+\ldots+C\int_{\xi_{i-1}''}^{\eta_i''}\lambda_1(z)\,dz+$$
$$+c\int_{\eta_i''}^{\xi_i''}\lambda_1(z)\,dz<\int_a^{\xi_i''}f(z)\lambda_1(z)\,dz,$$

$$c\int_a^{\xi_1'}\lambda_1(z)\,dz+C\int_{\xi_1'}^{\eta_1'}\lambda_1(z)\,dz+\ldots$$
$$\ldots+C\int_{\xi_i'}^{\eta_i'}\lambda_1(z)\,dz>\int_a^{\eta_i'}f(z)\lambda_1(z)\,dz,$$

$$c\int_a^{\xi_1'}\lambda_1(z)\,dz+\ldots+C\int_{\xi_1'}^{\eta_i'}\lambda_1(z)\,dz+$$
$$+c\int_{\eta_i'}^{\xi_{i+1}'}\lambda_1(z)\,dz<\int_a^{\xi_{i+1}'}f(z)\lambda_1(z)\,dz$$

при n чётном и подобные же четыре неравенства при n нечётном.

Все эти неравенства представляют обобщение известных неравенств Чебышева.

Условия, которым мы подчинили функции

$$\lambda_1(z),\ \lambda_2(z),\ \ldots,\ \lambda_n(z),\ \lambda_{n+1}(z),\ \Omega(z),$$

предполагают непрерывность этих функций и даже существование их производных различных порядков.

Однако можно распространить выводы §§ 2, 3, 4, 5 и 6 и на разрывные функции, так как эти выводы основаны только на следующем предположении.

При всех значениях чисел

$$u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_{n+1},$$

удовлетворяющих неравенствам

$$a \leqslant u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+1} \leqslant b,$$

выражения

$$\lambda_1(u_1), \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2(u_2) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2(u_2) & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1) & \lambda_3(u_2) & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

сохраняют положительные значения, а выражения

$$\Omega(u_1), \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) \\ \Omega(u_1) & \Omega(u_2) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2(u_2) & \lambda_2(u_3) \\ \Omega(u_1) & \Omega(u_2) & \Omega(u_3) \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

не получают отрицательных значений.

Пределы интегрирования a и b мы предполагали данными конечными числами.

Если же

$$a = -\infty \quad \text{или} \quad b = +\infty,$$

то указанные нами решения могут не существовать, как было уже замечено в мемуаре «Новые приложения непрерывных дробей».

§ 7. Числа c и C мы также предполагали конечными. Но от полученных нами выводов нетрудно перейти к предельному случаю, когда

$$c = -\infty \quad \text{или} \quad C = +\infty.$$

Если C возрастает беспредельно при сохранении прочих условий без изменения, то промежутки, где функция $f(z)$ сохраняет постоянное значение C, должны приближаться к пределу нуль.

Отсюда уже нетрудно заключить, что при

$$c = 0 \quad \text{и} \quad C = +\infty$$

искомые нами предельные величины интегралов

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz \quad \text{и} \quad \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

выражаются не интегралами, а суммами конечного числа отдельных слагаемых.

При

$$\lambda_1(z)=1, \quad \lambda_2(z)=z, \quad \lambda_3(z)=z^2, \quad \ldots, \quad \lambda_{n+1}(z)=z^n$$

правильность этого заключения нами доказана в рассуждении «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей».

Затем в мемуаре «Sur une question de maximum et de minimum» указана возможность обобщения выводов предыдущего мемуара на какие угодно функции

$$\lambda_1(z), \ \lambda_2(z), \ \lambda_3(z), \ \ldots,$$

удовлетворяющие известным условиям, которые сохранены мной и в настоящей работе.

Надо, однако, заметить, что в мемуаре «Sur une question de maximum et de minimum» существует важный пробел, так как для упрощения исследований мы считали там очевидным à priori, что наши задачи имеют решение.

Немного изменяя рассуждения, приведённые в настоящей работе, можно пополнить этот пробел, что мы сейчас покажем.

Изменения, которым следует подвергнуть предыдущие рассуждения, если

$$c=0 \quad \text{и} \quad C=+\infty,$$

достаточно выяснятся, когда для задачи о предельных величинах интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

мы рассмотрим переход от $n=3$ к $n=4$.

Соответственно этому мы предположим доказанным, что при трёх данных

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)\,dz=\alpha_1,\quad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz=\alpha_2,$$

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)\,dz=\alpha_3$$

и условии

$$0\leqslant f(z)$$

предельными величинами интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_4(z)\,dz$$

будут

$$A'\lambda_4(a')+B\lambda_4(b) \quad \text{и} \quad A\lambda_4(a)+B'\lambda_4(b'),$$

причём числа

$$A',\ a',\ B,\ A,\ B',\ b'$$

определяются уравнениями

$$A'\lambda_1(a')+B\lambda_1(b)=A\lambda_1(a)+B'\lambda_1(b')=\alpha_1,$$

$$A'\lambda_2(a')+B\lambda_2(b)=A\lambda_2(a)+B'\lambda_2(b')=\alpha_2,$$

$$A'\lambda_3(a')+B\lambda_3(b)=A\lambda_3(a)+B'\lambda_3(b')=\alpha_3$$

и неравенствами

$$a<a'<b,\quad a<b'<b;$$

так что

$$A'\lambda_4(a')+B\lambda_4(b)\geqslant\int_a^b f(z)\lambda_4(z)\,dz\geqslant A\lambda_4(a)+B'\lambda_4(b').$$

Предположим также

$$A'>0,\ B>0,\ A>0,\ B'>0.$$

Допустив всё это, введём переменное число x_1, лежащее между b' и b, и для каждого данного его значения будем подбирать три другие переменные числа

$$X, \ x, \ X_1$$

так, чтобы сумма

$$X\lambda_4(x) + X_1\lambda_4(x_1)$$

представляла наибольшую величину интеграла

$$\int_a^{x_1} f(z)\lambda_4(z)\,dz$$

при данных

$$\int_a^{x_1} f(z)\lambda_1(z)\,dz = \alpha_1, \quad \int_a^{x_1} f(z)\lambda_2(z)\,dz = \alpha_2,$$

$$\int_a^{x_1} f(z)\lambda_3(z)\,dz = \alpha_3$$

и условии

$$0 \leqslant f(z).$$

Надо помнить, что к интегралам мы причисляем и суммы ($f(z) = \infty$), как было уже установлено в прежних статьях.

Согласно нашим предположениям, числа

$$X, \ x, \ X_1$$

определяются, при данном значении x_1, из системы уравнений

$$X\lambda_1(x) + X_1\lambda_1(x_1) = \alpha_1,$$
$$X\lambda_2(x) + X_1\lambda_2(x_1) = \alpha_2,$$
$$X\lambda_3(x) + X_1\lambda_3(x_1) = \alpha_3,$$

причём

$$a < x < x_1, \ b' < x_1 < b, \ X > 0, \ X_1 > 0.$$

Отсюда посредством дифференцирования выводим такие уравнения:

$$\lambda_1(x)\,dX + X\lambda_1'(x)\,dx + \lambda_1(x_1)\,dX_1 + X_1\lambda_1'(x_1)\,dx_1 = 0,$$
$$\lambda_2(x)\,dX + X\lambda_2'(x)\,dx + \lambda_2(x_1)\,dX_1 + X_1\lambda_2'(x_1)\,dx_1 = 0,$$
$$\lambda_3(x)\,dX + X\lambda_3'(x)\,dx + \lambda_3(x_1)\,dX_1 + X_1\lambda_3'(x_1)\,dx_1 = 0,$$

которые показывают, что при непрерывном возрастании x_1 остальные три переменные

$$X, \ x, \ X_1$$

изменяются также непрерывно, причём x возрастает, так как произведения

$$X\,dx, \ X_1\,dx_1$$

пропорциональны определителям

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x_1) & \lambda_1'(x_1) & \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x_1) & \lambda_2'(x_1) & \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x_1) & \lambda_3'(x_1) & \lambda_3(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(x_1) \\ \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(x_1) \\ \lambda_3(x) & \lambda_3'(x) & \lambda_3(x_1) \end{vmatrix},$$

а эти определители, в силу следствия 2 теоремы 1, должны иметь положительные значения.

Дифференцируя затем сумму

$$X\lambda_4(x) + X_1\lambda_4(x_1),$$

получаем:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(x_1) \\ \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(x_1) \\ \lambda_3(x) & \lambda_3'(x) & \lambda_3(x_1) \end{vmatrix} \frac{d\,\{X\lambda_4(x) + X_1\lambda_4(x_1)\}}{X_1\,dx_1} =$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(x_1) & \lambda_1'(x_1) \\ \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(x_1) & \lambda_2'(x_1) \\ \lambda_3(x) & \lambda_3'(x) & \lambda_3(x_1) & \lambda_3'(x_1) \\ \lambda_4(x) & \lambda_4'(x) & \lambda_4(x_1) & \lambda_4'(x_1) \end{vmatrix}.$$

Последняя формула обнаруживает, что при непрерывном возрастании x_1 сумма

$$X\lambda_4(x)+X_1\lambda_4(x_1)$$

также возрастает непрерывно.

Наконец, мы знаем, что при $x_1=b'$ и при $x_1=b$ сумма

$$X\lambda_4(x)+X_1\lambda_4(x_1)$$

принимает соответственно значения

$$A\lambda_4(a)+B'\lambda_4(b') \quad \text{и} \quad A'\lambda_4(a')+B\lambda_4(b),$$

между которыми должна заключаться задаваемая нами величина α_4 интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_4(z)\,dz.$$

Следовательно, произвольностью числа x_1 можно распорядиться так, чтобы было

$$X\lambda_4(x)+X_1\lambda_4(x_1)=\alpha_4.$$

Таким образом, мы убеждаемся в возможности удовлетворить четырём уравнениям

$$X\lambda_1(x)+X_1\lambda_1(x_1)=\alpha_1, \quad X\lambda_2(x)+X_1\lambda_2(x_1)=\alpha_2,$$
$$X\lambda_3(x)+X_1\lambda_3(x_1)=\alpha_3, \quad X\lambda_4(x)+X_1\lambda_4(x_1)=\alpha_4$$

и неравенствам

$$X>0, \quad X_1>0, \quad a<x<x_1<b.$$

Удовлетворив этим условиям, мы можем рассматривать сумму

$$X\lambda_5(x)+X_1\lambda_5(x_1)$$

как одно из возможных значений интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_5(z)\,dz.$$

Покажем теперь, что это значение, т. е. сумма $X\lambda_5(x)+X_1\lambda_5(x_1)$ при наших условиях меньше всех остальных значений того же интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_5(z)\,dz.$$

Для этой цели рассмотрим выражение

$$\Phi(z)=p_1\lambda_1(z)+p_2\lambda_2(z)+p_3\lambda_3(z)+p_4\lambda_4(z),$$

коэффициенты которого

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$$

определим четырьмя условиями

$$\Phi(x)=\lambda_5(x),\quad \Phi'(x)=\lambda_5'(x),$$
$$\Phi(x_1)=\lambda_5(x_1),\quad \Phi'(x_1)=\lambda_5'(x_1).$$

В силу следствия 2 теоремы 1 из формулы

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(x_1) & \lambda_1'(x_1) \\ \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(x_1) & \lambda_2'(x_1) \\ \lambda_3(x) & \lambda_3'(x) & \lambda_3(x_1) & \lambda_3'(x_1) \\ \lambda_4(x) & \lambda_4'(x) & \lambda_4(x_1) & \lambda_4'(x_1) \end{vmatrix} \{\lambda_5(z)-\Phi(z)\} =$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(x_1) & \lambda_1'(x_1) & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(x_1) & \lambda_2'(x_1) & \lambda_2(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_5(x) & \lambda_5'(x) & \lambda_5(x_1) & \lambda_5'(x_1) & \lambda_5(z) \end{vmatrix}$$

вытекает неравенство

$$\lambda_5(z)>\Phi(z)$$

при всех рассматриваемых нами значениях z, кроме двух:

$$z=x,\quad z=x_1,$$

которым соответствуют равенства

$$\lambda_5(x)=\Phi(x),\quad \lambda_5(x_1)=\Phi(x_1);$$

поэтому

$$\int_a^b f(z)\lambda_5(z)\,dz > \int_a^b f(z)\Phi(z)\,dz.$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что интеграл

$$\int_a^b f(z)\Phi(z)\,dz$$

равен

$$X\lambda_5(x) + X_1\lambda_5(x_1)$$

для всех рассматриваемых нами функций $f(z)$.

Итак, сумма

$$X\lambda_5(x) + X_1\lambda_5(x_1)$$

действительно представляет, при наших условиях, низший предел всех значений интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_5(z)\,dz.$$

Чтобы получить высший предел тех же значений, возьмём переменное число α, лежащее между 0 и A, и для каждого значения этого переменного станем подбирать числа

$$X,\ x,\ \beta$$

так, чтобы сумма

$$X\lambda_4(x) + \beta\lambda_4(b)$$

давала наибольшую величину интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_4(z)\,dz$$

при условиях

$$\int_a^b f(z)\lambda_i(z)\,dz = (A-\alpha)\lambda_i(a) + B'\lambda_i(b') \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

$$0 \leqslant f(z).$$

Другими словами, установим уравнения

$$\alpha\lambda_1(a)+X\lambda_1(x)+\beta\lambda_1(b)=\alpha_1,$$
$$\alpha\lambda_2(a)+X\lambda_2(x)+\beta\lambda_2(b)=\alpha_2,$$
$$\alpha\lambda_3(a)+X\lambda_3(x)+\beta\lambda_3(b)=\alpha_3,$$

откуда посредством дифференцирования выводим

$$\lambda_1(a)\,d\alpha+\lambda_1(x)\,dX+X\lambda_1'(x)\,dx+\lambda_1(b)\,d\beta=0,$$
$$\lambda_2(a)\,d\alpha+\lambda_2(x)\,dX+X\lambda_2'(x)\,dx+\lambda_2(b)\,d\beta=0,$$
$$\lambda_3(a)\,d\alpha+\lambda_3(x)\,dX+X\lambda_3'(x)\,dx+\lambda_3(b)\,d\beta=0.$$

Последние равенства показывают, что при непрерывном возрастании α, от 0 до A, остальные три переменные изменяются также непрерывно и x возрастает, так как

$$\frac{d\alpha}{\begin{vmatrix}\lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(b)\\ \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(b)\\ \lambda_3(x) & \lambda_3'(x) & \lambda_3(b)\end{vmatrix}}=\frac{X\,dx}{\begin{vmatrix}\lambda_1(a) & \lambda_1(x) & \lambda_1(b)\\ \lambda_2(a) & \lambda_2(x) & \lambda_2(b)\\ \lambda_3(a) & \lambda_3(x) & \lambda_3(b)\end{vmatrix}}.$$

В силу тех же дифференциальных уравнений имеем:

$$\begin{vmatrix}\lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(b)\\ \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(b)\\ \lambda_3(x) & \lambda_3'(x) & \lambda_3(b)\end{vmatrix}\frac{d\{\alpha\lambda_4(a)+X\lambda_4(x)+\beta\lambda_4(b)\}}{d\alpha}=$$

$$=-\begin{vmatrix}\lambda_1(a) & \lambda_1(x) & \lambda_1'(x) & \lambda_1(b)\\ \lambda_2(a) & \lambda_2(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_2(b)\\ \lambda_3(a) & \lambda_3(x) & \lambda_3'(x) & \lambda_3(b)\\ \lambda_4(a) & \lambda_4(x) & \lambda_4'(x) & \lambda_4(b)\end{vmatrix}<0.$$

Наконец, мы знаем, что при $\alpha=0$ и $\alpha=A$ сумма

$$\alpha\lambda_4(a)+X\lambda_4(x)+\beta\lambda_4(b)$$

принимает соответственно значения

$$A'\lambda_4(a')+B\lambda_4(b) \quad \text{и} \quad A\lambda_4(a)+B'\lambda_4(b'),$$

между которыми должна заключаться задаваемая нами величина α_4 интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_4(z)\,dz.$$

Следовательно, можно распорядиться числами

$$\alpha,\ X,\ x,\ \beta$$

так, чтобы были удовлетворены все четыре уравнения

$$\alpha\lambda_1(a)+X\lambda_1(x)+\beta\lambda_1(b)=\alpha_1,\ \alpha\lambda_2(a)+X\lambda_2(x)+\beta\lambda_2(b)=\alpha_2,$$

$$\alpha\lambda_3(a)+X\lambda_3(x)+\beta\lambda_3(b)=\alpha_3,\ \alpha\lambda_4(a)+X\lambda_4(x)+\beta\lambda_4(b)=\alpha_4$$

вместе с неравенствами

$$\alpha>0,\ X>0,\ \beta>0,\ a<x<b.$$

Этим величинам

$$\alpha,\ X,\ x,\ \beta$$

соответствует сумма

$$\alpha\lambda_5(a)+X\lambda_5(x)+\beta\lambda_5(b),$$

которая представляет искомый нами высший предел значений интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_5(z)\,dz,$$

в чём нетрудно убедиться.

При $C=+\infty$ оказалось необходимым ввести производные первого порядка от наших функций λ, но нет надобности в существовании их производных высшего порядка.

§ 8. Переходя к установлению связи между нашими исследованиями и другими вышеупомянутыми, положим:

$$c=-1 \text{ и } C=+1.$$

Вместе с тем приравняем вспомогательную функцию $F(z)$ нулю, т. е. положим:

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_n = 0.$$

Тогда, как нетрудно видеть, наибольшая и наименьшая величины интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

будут отличаться друг от друга только знаком $\pm$, и для перехода от одной к другой достаточно переменить знак $\pm$ функции $f(z)$.

Следовательно, вопрос о предельных величинах интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

при условиях

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1$$

и

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_1(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,\lambda_2(z)\,dz = \ldots$$

$$\ldots = \int_a^b f(z)\,\lambda_n(z)\,dz = 0$$

сводится к разысканию такой системы чисел

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n,$$

которая удовлетворяет неравенствам

$$a < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_n < b$$

и уравнениями

$$\int_a^{\zeta_1} \lambda_1(z)\,dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \lambda_1(z)\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\zeta_n}^{b} \lambda_1(z)\,dz = 0,$$

$$\int_a^{\zeta_1} \lambda_2(z)\,dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \lambda_2(z)\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\zeta_n}^{b} \lambda_2(z)\,dz = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_a^{\zeta_1} \lambda_n(z)\,dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \lambda_n(z)\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\zeta_n}^{b} \lambda_n(z)\,dz = 0.$$

Наибольшая величина интеграла

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

при наших условиях представляется суммой

$$\int_{\zeta_n}^{b} \lambda_{n+1}(z)\,dz - \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} \lambda_{n+1}(z)\,dz + \int_{\zeta_{n-2}}^{\zeta_{n-1}} \lambda_{n+1}(z)\,dz + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int_a^{\zeta_1} \lambda_{n+1}(z)\,dz,$$

которую, по примеру Чебышева *), мы обозначим символом

$$\int_n \lambda_{n+1}(z),$$

---

*) Чебышев, Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données.

полагая

$$\int\limits_{n} \omega(z) = \int\limits_{\zeta_n}^{b} \omega(z)\,dz - \int\limits_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} \omega(z)\,dz + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \int\limits_{a}^{\zeta_1} \omega(z)\,dz$$

для всякой функции $\omega(z)$.

К символам

$$\int\limits_{1} \omega(z), \quad \int\limits_{2} \omega(z), \quad \int\limits_{3} \omega(z), \quad \dots$$

мы прибавим, также по примеру Чебышева, ещё символ

$$\int\limits_{0} \omega(z),$$

которым будем обозначать

$$\int\limits_{a}^{b} \omega(z)\,dz.$$

Надо помнить, что символы

$$\int\limits_{0} \lambda_1(z), \quad \int\limits_{1} \lambda_2(z), \quad \int\limits_{2} \lambda_3(z), \quad \dots$$

означают числа положительные (не равные нулю): первый из них означает наибольшую величину интеграла

$$\int\limits_{a}^{b} f(z)\,\lambda_1(z)\,dz,$$

если функция $f(z)$ ограничена только неравенствами

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1;$$

второй означает наибольшую величину интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_2(z)\,dz,$$

если, кроме вышеустановленных неравенств

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1,$$

должно быть выполнено условие

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_1(z)\,dz = 0;$$

третий означает наибольшую величину интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_3(z)\,dz$$

при соблюдении тех же неравенств и двух условий

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_1(z)\,dz = 0, \quad \int_a^b f(z)\,\lambda_2(z)\,dz = 0$$

и т. д.

Напротив, при

$$n \geqslant m$$

выражение

$$\int_n \lambda_m(z)$$

должно приводиться к нулю, так что для всякой функции

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

имеем

$$\int_n \Phi(z) = 0,$$

каковы бы ни были значения коэффициентов

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n.$$

После всех этих замечаний введём какую-нибудь функцию $\Omega(z)$, которая должна только удовлетворять условию

$$\Delta\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n & \Omega \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & u_{n+1}\end{pmatrix} \geqslant 0,$$

коль скоро

$$a \leqslant u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} < b;$$

к числу таких функций $\Omega(z)$ принадлежит $\lambda_{n+1}(z)$.

Займёмся теперь рассмотрением различных приближённых выражений $\Omega(z)$ функциями вида

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z).$$

Для оценки степени точности таких приближённых выражений функции $\Omega(z)$ мы будем рассматривать величину интеграла

$$\int\limits_a^b |\Omega(z) - \Phi(z)|\, dz.$$

Стильтьес в мемуаре «Iets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere» решает следующую задачу.

Определить коэффициенты

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

выражения

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

так, чтобы интеграл

$$\int\limits_a^b |\Omega(z) - \Phi(z)|\, dz$$

имел наименьшую величину.

Ещё раньше, чем Стильтьес, проф. А. Коркин и Е. Золотарёв в мемуаре «Sur un certain minimum» рассмотрели с надлежащей обстоятельностью тот частный случай этой задачи, когда

$$\lambda_1(z)=1,\ \lambda_2(z)=z,\ \ldots,\ \lambda_n(z)=z^{n-1},\ \Omega(z)=z^n.$$

Мы представим её решение в виде теоремы.

Теорема 3. *Интеграл*

$$\int_a^b |\Omega(z)-\Phi(z)|\,dz$$

достигает своей наименьшей величины

$$\int_n \Omega(z),$$

когда коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *выражения*

$$\Phi(z)=p_1\lambda_1(z)+p_2\lambda_2(z)+\ldots+p_n\lambda_n(z)$$

определены из системы уравнений

$$\begin{gathered}
p_1\lambda_1(\zeta_1)+p_2\lambda_2(\zeta_1)+\ldots+p_n\lambda_n(\zeta_1)=\Omega(\zeta_1),\\
p_1\lambda_1(\zeta_2)+p_2\lambda_2(\zeta_2)+\ldots+p_n\lambda_n(\zeta_2)=\Omega(\zeta_2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_1\lambda_1(\zeta_n)+p_2\lambda_2(\zeta_n)+\ldots+p_n\lambda_n(\zeta_n)=\Omega(\zeta_n),
\end{gathered}$$

причём

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n \text{ и } \int_n \Omega(z)$$

имеют вышеустановленный смысл.

Доказательство. Пусть $\varphi(z)$ — то выражение

$$\Phi(z)=p_1\lambda_1(z)+p_2\lambda_2(z)+\ldots+p_n\lambda_n(z),$$

коэффициенты которого $p_1, p_2, \ldots, p_n$ определены, согласно требованиям теоремы, уравнениями

$$\varphi(\zeta_1)=\Omega(\zeta_1),\quad \varphi(\zeta_2)=\Omega(\zeta_2),\ \ldots,\ \varphi(\zeta_n)=\Omega(\zeta_n).$$

Тогда в силу следствия 3 теоремы 1 разность

$$\Omega(z)-\varphi(z)$$

будет числом положительным при

$$b > z > \zeta_n, \quad \zeta_{n-1} > z > \zeta_{n-2}, \quad \zeta_{n-3} > z > \zeta_{n-4}, \ldots$$

и, напротив, числом отрицательным при

$$\zeta_n > z > \zeta_{n-1} \quad \zeta_{n-2} > z > \zeta_{n-3}, \ldots$$

Поэтому

$$\int_a^b |\Omega(z) - \varphi(z)|\, dz = \int_n \{\Omega(z) - \varphi(z)\} = \int_n \Omega(z),$$

так как

$$\int_n \varphi(z) = 0.$$

С другой стороны, для всякого другого выражения

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

имеем:

$$\int_a^b |\Omega(z) - \Phi(z)|\, dz > \int_n \{\Omega(z) - \Phi(z)\} = \int_n \Omega(z).$$

§ 9. Исследования §§ 5 и 6 могут быть также связаны с некоторой задачей о приближённом представлении функций, если мы будем считать

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

Положим, что выражение

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

должно служить для приближённого представления функции $\Omega(z)$ в промежутке от $z = a$ до $z = v$ и для приближённого представления постоянного числа нуль в промежутке от $z = v$ до z до $z = b$.

Степень точности такого приближённого представления функции $\Omega(z)$ и нуля мы будем измерять суммой

$$\int_a^v |\Omega(z)-\Phi(z)|\,dz+\int_v^b |\Phi(z)|\,dz$$

и поставим себе такую задачу: *подобрать коэффициенты* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *выражения*

$$\Phi(z)=p_1\lambda_1(z)+p_2\lambda_2(z)+\ldots+p_n\lambda_n(z)$$

так, чтобы сумма

$$\int_a^v |\Omega(z)-\Phi(z)|\,dz+\int_v^b |\Phi(z)|\,dz$$

достигала своей наименьшей величины.

Предполагая, что ни при каких значениях чисел

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n+1},$$

удовлетворяющих неравенствам

$$a\leqslant u_1<u_2<\ldots<u_n<u_{n+1}\leqslant b,$$

выражения

$$\Omega(u_1),\ \begin{vmatrix}\lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2)\\ \Omega(u_1) & \Omega(u_2)\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) & \lambda_1(u_3)\\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2(u_2) & \lambda_2(u_3)\\ \Omega(u_1) & \Omega(u_2) & \Omega(u_3)\end{vmatrix}\ \text{и т. д.}$$

не получают отрицательных значений, мы дадим решение нашей задачи в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Если v не совпадает ни с одним из ранее определённых чисел*

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n,$$

то должны существовать некоторые другие числа

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,$$

удовлетворяющие равенствам

$$a<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_k<v<\theta_{k+1}<\ldots<\theta_n<b$$

и системе уравнений

$$\int_a^{\theta_1} \lambda_i(z)\,dz - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_i(z)\,dz + \ldots \pm \int_{\theta_k}^{v} \lambda_i(z)\,dz \mp$$

$$\mp \int_v^{\theta_{k+1}} \lambda_i(z)\,dz \ldots \pm \int_{\theta_n}^{b} \lambda_i(z)\,dz = 0$$

при $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Составим по этим числам

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$$

ряд уравнений

$$\begin{aligned}
p_1\lambda_1(\theta_1) + p_2\lambda_2(\theta_1) + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_1) &= \Omega(\theta_1),\\
p_1\lambda_1(\theta_2) + p_2\lambda_2(\theta_2) + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_2) &= \Omega(\theta_2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1\lambda_1(\theta_k) + p_2\lambda_2(\theta_k) + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_k) &= \Omega(\theta_k),\\
p_1\lambda_1(\theta_{k+1}) + p_2\lambda_2(\theta_{k+1}) + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_{k+1}) &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1\lambda_1(\theta_n) + p_2\lambda_2(\theta_n) + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_n) &= 0,
\end{aligned}$$

и, определив из них числа

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

мы получим искомое выражение

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

которому соответствует наименьшая величина нашей суммы

$$\int_a^v |\Omega(z) - \Phi(z)|\,dz + \int_v^b |\Phi(z)|\,dz,$$

равная

$$\int_{\theta_k}^{v} \Omega(z)\,dz - \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \Omega(z)\,dz + \ldots + (-1)^k \int_a^{\theta_1} \Omega(z)\,dz.$$

Если

$$v = \zeta_k,$$

то искомое нами выражение

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

для которого сумма

$$\int_a^v |\Omega(z) - \Phi(z)|\, dz + \int_v^b |\Phi(z)|\, dz$$

достигает своей наименьшей величины

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \Omega(z)\, dz - \int_{\zeta_{k-2}}^{\zeta_{k-1}} \Omega(z)\, dz + \ldots + (-1)^{k-1} \int_a^{\zeta_1} \Omega(z)\, dz,$$

определяется из системы уравнений

$$\Phi(\zeta_1) = \Omega(\zeta_1), \quad \Phi(\zeta_2) = \Omega(\zeta_2), \quad \ldots, \quad \Phi(\zeta_{k-1}) = \Omega(\zeta_{k-1})$$
$$p_n = 0, \Phi(\zeta_{k+1}) = 0, \Phi(\zeta_{k+2}) = 0, \ldots, \Phi(\zeta_n) = 0.$$

Доказательство. Пусть v не равно ни одному из чисел

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n.$$

Тогда, согласно исследованиям §§ 5 и 6, должны существовать числа

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n,$$

удовлетворяющие требованиям теоремы; а вместе с тем среди выражений

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

должно находиться такое, коэффициенты которого

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

определяются уравнениями теоремы.

Обозначив это выражение $\Phi(z)$ через $\varphi(z)$, имеем:

$$\varphi(\theta_1) = \Omega(\theta_1), \quad \varphi(\theta_2) = \Omega(\theta_2), \ldots, \varphi(\theta_k) = \Omega(\theta_k),$$
$$\varphi(\theta_{k+1}) = 0, \varphi(\theta_{k+2}) = 0, \ldots, \varphi(\theta_n) = 0.$$

Функция $\Omega(z)$ принадлежит к числу таких, на которые нетрудно распространить теорему 2.

Поэтому

$$\Omega(z)-\varphi(z)>0$$

при $\theta_k<z<v$, $\theta_{k-2}<z<\theta_{k-1}$, $\theta_{k-4}<z<\theta_{k-3}$ и т. д.,

$$\Omega(z)-\varphi(z)<0$$

при $\qquad \theta_{k-1}<z<\theta_k, \quad \theta_{k-3}<z<\theta_{k-2}$ и т. д.,

$$\varphi(z)>0$$

при $v<z<\theta_{k+1}, \quad \theta_{k+2}<z<\theta_{k+3}$ и т. д.,

$$\varphi(z)<0$$

при $\theta_{k+1}<z<\theta_{k+2}$, $\theta_{k+3}<z<\theta_{k+4}$ и т. д., и, следовательно, сумма

$$\int_a^v |\Omega(z)-\varphi(z)|\,dz+\int_v^b |\varphi(z)|\,dz$$

равна

$$(-1)^k\int_a^{\theta_1}\{\Omega(z)-\varphi(z)\}\,dz+\ldots-\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}\{\Omega(z)-\varphi(z)\}\,dz+$$

$$+\int_{\theta_k}^{v}\{\Omega(z)-\varphi(z)\}\,dz+\int_v^{\theta_{k+1}}\varphi(z)\,dz-$$

$$-\int_{\theta_{k+1}}^{\theta_{k+2}}\varphi(z)\,dz+\ldots+(-1)^{n-k}\int_{\theta_n}^{b}\varphi(z)\,dz,$$

что приводится к

$$\int_{\theta_k}^{v} \Omega(z)\,dz - \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \Omega(z)\,dz + \ldots + (-1)^k \int_{a}^{\theta_1} \Omega(z)\,dz,$$

так как

$$\int_{\theta_k}^{v} \varphi(z)\,dz - \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \varphi(z)\,dz + \ldots =$$

$$= \int_{v}^{\theta_{k+1}} \varphi(z)\,dz - \int_{\theta_{k+1}}^{\theta_{k+2}} \varphi(z)\,dz + \ldots$$

Для всякого же другого выражения

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

наша сумма

$$\int_{a}^{v} |\Omega(z) - \Phi(z)|\,dz + \int_{v}^{b} |\Phi(z)|\,dz$$

больше

$$(-1)^k \int_{a}^{\theta_1} \{\Omega(z) - \Phi(z)\}\,dz + \ldots - \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \{\Omega(z) - \Phi(z)\}\,dz +$$

$$+ \int_{\theta_k}^{v} \{\Omega(z) - \Phi(z)\}\,dz + \int_{v}^{\theta_{k+1}} \Phi(z)\,dz - \int_{\theta_{k+1}}^{\theta_{k+2}} \Phi(z)\,dz + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int_{\theta_n}^{b} \Phi(z)\,dz,$$

что также приводится к

$$\int_{\theta_k}^{v} \Omega(z)\,dz - \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \Omega(z)\,dz + \ldots + (-1)^k \int_{v}^{\theta_1} \Omega(z)\,dz.$$

Совершенно так же можно доказать и конец теоремы, относящийся к случаю $v=\zeta_k$.

Заметим, что сумма

$$\int_{\theta_k}^{v}\Omega(z)\,dz-\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}\Omega(z)\,dz+\ldots+(-1)^k\int_{a}^{\theta_1}\Omega(z)\,dz$$

представляет, согласно исследованиям §§ 5 и 6, наибольшую величину интеграла

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz,$$

при условиях

$$-1\leqslant f(z)\leqslant+1,$$

$$\int_a^b f(z)\,\lambda_1(z)\,dz=\int_a^b f(z)\,\lambda_2(z)\,dz=\ldots$$

$$\ldots=\int_a^b f(z)\,\lambda_n(z)\,dz=0.$$

§ 10. Перейдём к обобщению способа интерполирования, который был дан Чебышевым в вышеупомянутом мемуаре «Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations».

Для этой цели составляем новые функции

$$\psi_1(z)=\lambda_1(z)$$

$$\psi_2(z)=\lambda_2(z)+g_{1,2}\lambda_1(z),$$

$$\psi_3(z)=\lambda_3(z)+g_{2,3}\lambda_2(z)+g_{1,3}\lambda_1(z),$$

. . . .

$$\psi_n(z)=\lambda_n(z)+g_{n-1,n}\lambda_{n-1}(z)+\ldots+g_{2,n}\lambda_2(z)+g_{1,n}\lambda_1(z),$$

. . . .

определяя коэффициенты

$$g_{n-1,n},\quad g_{n-2,n},\quad\ldots,\quad g_{2,n},\quad g_{1,n}$$

уравнениями

$$\int\limits_{0} \psi_n(z) = 0, \quad \int\limits_{1} \psi_n(z) = 0, \quad \ldots, \quad \int\limits_{n-2} \psi_n(z) = 0.$$

Установленные нами уравнения наверное имеют решение, так как они приводятся к следующим:

$$\int\limits_{n-2} \lambda_n(z) + g_{n-1,n} \int\limits_{n-2} \lambda_{n-1}(z) = 0,$$

$$\int\limits_{n-3} \lambda_n(z) + g_{n-1,n} \int\limits_{n-3} \lambda_{n-1}(z) + g_{n-2,n} \int\limits_{n-3} \lambda_{n-2}(z) = 0,$$

. . . .

$$\int\limits_{1} \lambda_n(z) + g_{n-1,n} \int\limits_{1} \lambda_{n-1}(z) + \ldots + g_{2,n} \int\limits_{1} \lambda_2(z) = 0,$$

$$\int\limits_{0} \lambda_n(z) + g_{n-1,n} \int\limits_{0} \lambda_{n-1}(z) + \ldots +$$

$$+ g_{2,n} \int\limits_{0} \lambda_2(z) + g_{1,n} \int\limits_{0} \lambda_1(z) = 0,$$

и все числа

$$\int\limits_{n-2} \lambda_{n-1}(z), \quad \int\limits_{n-3} \lambda_{n-2}(z), \quad \ldots, \quad \int\limits_{1} \lambda_2(z), \quad \int\limits_{0} \lambda_1(z)$$

отличны от нуля.

Составленные нами функции удовлетворяют условию

$$\int\limits_{m} \psi_n(z) = 0$$

при всех значениях m, кроме $m = n - 1$; вместе с тем имеем:

$$\int\limits_{n-1} \psi_n(z) = \int\limits_{n-1} \lambda_n(z) > 0.$$

Нетрудно видеть также, что

$$\int_{n} \psi_{n+1}(z)$$

представляет наибольшую величину интеграла

$$\int_a^b f(z)\,\psi_{n+1}(z)\,dz$$

не только при условиях

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1,$$

$$\int_a^b f(z)\,\psi_1(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,\psi_2(z)\,dz = \ldots =$$

$$= \int_a^b f(z)\,\psi_n(z)\,dz = 0,$$

но и в том случае, когда к этим условиям присоединено произвольное число следующих:

$$\int_a^b f(z)\,\psi_{n+2}(z)\,dz = 0, \quad \int_a^b f(z)\,\psi_{n+3}(z)\,dz = 0, \text{ и т. д.}$$

Положим теперь, что для некоторой функции вида

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

коэффициенты которой

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$$

нам неизвестны, можно определить довольно точно величину интеграла

$$\int_\xi^\eta \Phi(z)\,dz$$

при любых данных значениях ξ и η, лежащих между a и b.

Такую функцию $\Phi(z)$ мы можем представить под видом суммы

$$q_1\psi_1(z)+q_2\psi_2(z)+\ldots+q_n\psi_n(z),$$

и нетрудно убедиться, что коэффициенты

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

можно определить формулами

$$q_m \int\limits_{m-1} \psi_m(z) = \int\limits_{m-1} \Phi(z) \qquad (m=1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом обобщается способ интерполирования, при весьма большом числе данных, предложенный Чебышевым для случая

$$\lambda_1(z)=1, \ \lambda_2(z)=z, \ \lambda_3(z)=z^2, \ \ldots, \lambda_n(z)=z^{n-1}, \ \ldots$$

Мы пришли к формуле

$$\Phi(z)=\frac{\psi_1(z)\int\limits_0 \Phi(z)}{\int\limits_0 \psi_1(z)}+\frac{\psi_2(z)\int\limits_1 \Phi(z)}{\int\limits_1 \psi_2(z)}+\ldots+\frac{\psi_n(z)\int\limits_{n-1} \Phi(z)}{\int\limits_{n-1} \psi_n(z)},$$

которая может служить для приближённого определения функции $\Phi(z)$, когда дано весьма большое число её значений; каждый член этой формулы вычисляется независимо от других.

Положим для примера:

$$a=0, \ b=\pi,$$

$$\lambda_1(z)=1, \quad \lambda_2(z)=-\cos z, \quad \lambda_3(z)=\cos 2z,$$

$$\lambda_4(z)=-\cos 3z \text{ и т. д.}$$

Нетрудно убедиться, что эти функции $\lambda(z)$ удовлетворяют установленным нами условиям.

Нетрудно также видеть, что при условии

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1$$

интеграл

$$\int_0^{\pi} f(z) \cos nz\, dz$$

достигает наибольшей величины для той функции $f(z)$, которая имеет значение:

$$\begin{array}{lll} +1 & \text{при} & 0 < z < \frac{\pi}{2n}, \\ -1 & » & \frac{\pi}{2n} < z < \frac{3\pi}{2n}, \\ +1 & » & \frac{3\pi}{2n} < z < \frac{5\pi}{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{n-1} & \text{при} & \frac{(2n-3)\pi}{2n} < z < \frac{(2n-1)\pi}{2n}, \\ (-1)^n & » & \frac{(2n-1)\pi}{2n} < z < \pi. \end{array}$$

Для той же функции $f(z)$ имеем

$$\int_0^{\pi} f(z)\, dz = 0, \quad \int_0^{\pi} f(z) \cos z\, dz = 0, \ldots$$

$$\ldots, \int_0^{\pi} f(z) \cos (n-1) z\, dz = 0,$$

в чём убеждает нас формула

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\, dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\, dz + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\, dz =$$

$$= \frac{2}{m} \left\{ \sin \frac{m\pi}{2n} - \sin \frac{3m\pi}{2n} + \sin \frac{5m\pi}{2n} - \ldots \pm \sin \frac{(2n-1)m\pi}{2n} \right\},$$

где m означает число целое, не равное нулю.

В силу этой формулы сумма

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz$$

обращается в нуль при всех целых положительных значениях m, кроме

$$m = n,\ 3n,\ 5n,\ \ldots;$$

если же $\frac{m}{n}$ равняется нечётному целому числу, то наша формула даёт:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz = \frac{2n}{m}(-1)^{\frac{m-n}{2n}}.$$

Следовательно, сумма

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos nz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos nz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos nz\,dz,$$

равная 2, представляет наибольшую величину интеграла

$$\int_0^{\pi} f(z)\cos nz\,dz$$

и в том случае, когда, кроме неравенств

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1,$$

должны быть выполнены уравнения

$$\int_0^\pi f(z)\,dz = \int_0^\pi f(z)\cos z\,dz = \ldots$$

$$\ldots = \int_0^\pi f(z)\cos(n-1)z\,dz = 0.$$

Поэтому, введя в прежде установленный символ множитель ± 1, который не изменяет существа дела, мы можем положить

$$\int_n \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \omega(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \omega(z)\,dz + \ldots \pm \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \omega(z)\,dz,$$

после чего указанные выше равенства дадут

$$\int_n \cos mz = 0$$

при всех целых значениях m, кроме

$$m = n,\ 3n,\ 5n,\ \ldots;$$

если же $\frac{m}{n}$ — целое нечётное число, то

$$\int_n \cos mz = \frac{2n}{m}(-1)^{\frac{m-n}{2n}}.$$

Наконец,

$$\int_0^\pi dz = \pi \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \cos mz\,dz = 0$$

при всяком целом положительном значении m.

Перейдём к функциям

$$\begin{aligned}
&\psi_1(z) = 1,\\
&\psi_2(z) = \cos z + g_{1,2},\\
&\psi_3(z) = \cos 2z + g_{2,3}\cos z + g_{1,3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\psi_{n+1}(z) = \cos nz + g_{n,\,n+1}\cos(n-1)z + \dots +\\
&\qquad\qquad + g_{2,\,n+1}\cos z + g_{1,n+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

и определим их коэффициенты

$$g_{1,2},\ g_{2,3},\ g_{1,3},\ g_{3,4},\ g_{2,4},\ g_{1,4},\ \dots$$

согласно условиям

$$\int_0 \psi_{n+1}(z) = \int_1 \psi_{n+1}(z) = \int_2 \psi_{n+1}(z) = \dots$$

$$\dots = \int_{n-1} \psi_{n+1}(z) = 0.$$

Разбирая сначала простейшие случаи, получаем:

$$\psi_1(z) = 1,\ \psi_2(z) = \cos z,\ \psi_3(z) = \cos 2z,$$

$$\psi_4(z) = \cos 3z + \frac{1}{3}\cos z,$$

$$\psi_5(z) = \cos 4z,\ \psi_6(z) = \cos 5z - \frac{1}{5}\cos z,$$

$$\psi_7(z) = \cos 6z + \frac{1}{3}\cos 2z,$$

$$\psi_8(z) = \cos 7z + \frac{1}{7}\cos z,\ \psi_9(z) = \cos 8z,$$

$$\psi_{10}(z) = \cos 9z + \frac{1}{3}\cos 3z,$$

$$\psi_{11}(z) = \cos 10z - \frac{1}{5}\cos 2z,$$

$$\psi_{12}(z) = \cos 11z + \frac{1}{11}\cos z \text{ и т. д.}$$

Для общего случая мы можем установить формулу

$$\psi_{n+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{n'} \cos \frac{nz}{n'},$$

где суммирование должно быть распространено на все нечётные делители n' числа n, не содержащие квадратных множителей, и h означает, сколько в n' содержится простых делителей вида $4k+1$, причём единицу мы причисляем к числу значений n', но не причисляем ни к квадратным множителям, ни к простым делителям.

Для проверки нашей формулы надо только убедиться, что сумма

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_m \cos \frac{nz}{n'}$$

обращается в нуль при

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1.$$

Для $m=0$ и для тех значений m, при которых отношение $\frac{n}{m}$ не обращается в целое нечётное число, все выражения

$$\int\limits_m \cos \frac{nz}{n'}$$

приводятся к нулю, и потому равенство

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \cos \frac{nz}{n'} = 0$$

очевидно.

Если же $\frac{n}{m}$ — нечётное целое число, в сумме

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_m \cos \frac{nz}{n'}$$

не обращаются в нуль те и только те члены, для которых отношение $\frac{n}{mn'}$ — число целое.

В силу вышеуказанных формул наша сумма

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_m \cos \frac{nz}{n'}$$

приведётся тогда к произведению дроби $\frac{2m}{n}$ на такую сумму

$$\sum (-1)^h (-1)^{\frac{n-mn'}{2mn'}},$$

где суммирование должно быть распространено на все делители n' числа $\frac{n}{m}$, не содержащие квадратных множителей.

С другой стороны, имеем

$$(-1)^{\frac{n-mn'}{2mn'}} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} (-1)^{\frac{n'-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} (-1)^{h_1},$$

где h_1 означает, сколько в n' содержится простых делителей вида $4k+3$; сумма же

$$h + h_1$$

означает число всех простых делителей числа n'.

Следовательно, наша сумма

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_m \cos \frac{nz}{n'}$$

равна произведению выражения

$$(-1)^{\frac{n-m}{2m}} \frac{2m}{n}$$

на разность

$$N_1 - N_2$$

между числом N_1 делителей отношения $\frac{n}{m}$, приводящихся к произведению чётного числа простых чисел, и числом N_2 делителей того же отношения $\frac{n}{m}$, приводящихся к произведению нечётного числа простых чисел, причём единицу мы причисляем к делителям первой категории и не присоединяем к простым числам.

При $m = n$ имеем

$$N_1 = 1, \ N_2 = 0$$

и, согласно этому,

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_n \cos \frac{nz}{n'} = 2.$$

Во всех же остальных случаях, когда $\frac{n}{m}$ равняется одному из чисел ряда

$$3, \ 5, \ 7, \ 9, \ 11, \ 13, \ 15, \ \ldots,$$

нетрудно убедиться в равенстве чисел N_1 и N_2.

Итак, сумма

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_m \cos \frac{nz}{n'}$$

обращается в нуль при всех значениях m, кроме $m = n$, когда она равна 2.

Следовательно, мы, действительно, можем положить

$$\psi_{n+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{n'} \cos \frac{nz}{n'}$$

и затем всякую функцию

$$\Phi(z) = p_1 + p_2 \cos z + p_3 \cos 2z + \ldots + p_n \cos (n-1) z$$

определять формулой

$$2\Phi(z) = \frac{2}{\pi} \psi_1(z) \int\limits_0 \Phi(z) + \psi_2(z) \int\limits_1 \Phi(z) + \ldots$$
$$\ldots + \psi_n(z) \int\limits_{n-1} \Phi(z).$$

Например, при $n=4$ имеем:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{2}\cos z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Phi(z)\,dz\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\Phi(z)\,dz+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\Phi(z)\,dz\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos 3z+\frac{1}{3}\cos z\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\Phi(z)\,dz+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\Phi(z)\,dz\right\}.$$

Оставляя

$$a=0 \text{ и } b=\pi,$$

мы можем также положить:

$$\lambda_1(z)=\sin z,\quad \lambda_2(z)=-\sin 2z,\quad \lambda_3(z)=\sin 3z,$$
$$\lambda_4(z)=-\sin 4z \text{ и т. д.}$$

В этом случае, который посредством подстановки

$$h\cos z=x$$

сводится к рассмотренному Чебышевым, нетрудно установить такие формулы:

$$\int_{n} \omega(z) = \int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n+1}} \omega(z)\,dz + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{n+1}}^{\pi} \omega(z)\,dz,$$

$\int\limits_{m-1} \sin nz = \frac{2m}{n}$, если $\frac{n}{m}$ — целое нечётное число, $\int\limits_{m-1} \sin nz = 0$ во всех других случаях и, наконец,

$$\psi_n(z) = \sum \frac{(-1)^k}{n'} \sin \frac{nz}{n'},$$

где суммирование должно быть распространено, подобно прежним суммированиям, на все нечётные делители n' числа n, не содержащие квадратных множителей, буква же k означает число всех простых делителей числа n'.

§ 11. Во всех наших исследованиях система функций

$$\lambda_1(z),\ \lambda_2(z),\ \lambda_3(z),\ \ldots$$

была ограничена известными неравенствами.

Однако наши выводы, хотя и не во всей полноте, могут быть распространены и на некоторые из тех случаев, для которых эти условия не выполнены.

Останавливаясь на одном из таких случаев, положим

$$a = 0,\ b = 2\pi,$$
$$\lambda_1(z) = 1,\quad \lambda_2(z) = \sin z,\quad \lambda_3(z) = \cos z,$$
$$\lambda_4(z) = \sin 2z,\ \lambda_5(z) = \cos 2z,\ \ldots$$

и вообще

$$\lambda_{2k}(z) = \sin kz,\ \lambda_{2k+1}(z) = \cos kz.$$

Нетрудно видеть, что из всех функций $f(z)$, удовлетворяющих неравенствам

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1,$$

даёт наибольшую величину интеграла

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin kz\, dz$$

та, которая сохраняет постоянное значение:

$$\begin{array}{lll}
+1 & \text{при} & 0 < z < \frac{\pi}{k}, \\
-1 & \text{»} & \frac{\pi}{k} < z < \frac{2\pi}{k}, \\
+1 & \text{»} & \frac{2\pi}{k} < z < \frac{3\pi}{k}, \\
\dots & \dots & \dots \\
+1 & \text{при} & \frac{(2k-2)\pi}{k} < z < \frac{(2k-1)\pi}{k}, \\
-1 & \text{»} & \frac{(2k-1)\pi}{k} < z < 2\pi.
\end{array}$$

Для той же функции $f(z)$ имеем

$$\int_0^{2\pi} f(z) \cos mz\, dz = 0,$$

каково бы ни было целое число m, затем

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin mz\, dz = \frac{4k}{m},$$

если $\frac{m}{k}$ — целое нечётное число, и, наконец,

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin mz\, dz = 0$$

в других случаях, когда m — число целое, а $\frac{m}{k}$ не приводится к нечётному целому числу.

Следовательно, сумма

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin kz\,dz - \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \sin kz\,dz + \int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{3\pi}{k}} \sin kz\,dz - \ldots - \int_{\frac{(2k-1)\pi}{k}}^{2\pi} \sin kz\,dz,$$

равная 4, представляет наибольшую величину интеграла

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin kz\,dz$$

и в том случае, когда к неравенствам

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1$$

прибавлены условия

$$\int_0^{2\pi} f(z)\,\lambda_1(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z)\,\lambda_2(z)\,dz = \ldots = \int_0^{2\pi} f(z)\,\lambda_{2k-1}(z)\,dz = 0.$$

Обращаясь к интегралу

$$\int_0^{2\pi} f(z) \cos kz\,dz,$$

видим, что при тех же неравенствах

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1$$

он достигает своей наибольшей величины для такой функции $f(z)$, которая сохраняет постоянное значение:

$$
\begin{array}{lll}
+1 & \text{при} & 0<z<\frac{\pi}{2k}, \\
-1 & » & \frac{\pi}{2k}<z<\frac{3\pi}{2k}, \\
+1 & » & \frac{3\pi}{2k}<z<\frac{5\pi}{2k}, \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\
-1 & \text{при} & \frac{(4k-3)\pi}{2k}<z<\frac{(4k-1)\pi}{2k}, \\
+1 & » & \frac{(4k-1)\pi}{2k}<z<2\pi.
\end{array}
$$

Для той же функции $f(z)$ имеем

$$\int_0^{2\pi} f(z)\sin mz\,dz=0,$$

каково бы ни было целое число m, затем

$$\int_0^{2\pi} f(z)\cos mz\,dz=(-1)^{\frac{m-k}{2k}}\frac{4k}{m},$$

если $\frac{m}{k}$ — целое нечётное число, и, наконец,

$$\int_0^{2\pi} f(z)\cos mz\,dz=0$$

в других случаях, когда m — число целое, а $\frac{m}{k}$ не приводится к нечётному числу.

Следовательно, сумма

$$\int_0^{\frac{\pi}{2k}}\cos kz\,dz-\int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{3\pi}{2k}}\cos kz\,dz+\ldots+\int_{\frac{(4k-1)\pi}{2k}}^{2\pi}\cos kz\,dz,$$

равная 4, представляет наибольшую величину интеграла

$$\int_0^{2\pi} f(z)\cos kz\,dz$$

и в том случае, когда к неравенствам

$$-1 \leqslant f(z) \leqslant +1$$

присоединены условия

$$\int_0^{2\pi} f(z)\lambda_1(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_2(z)\,dz = \ldots = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_{2k}(z)\,dz = 0.$$

После этих объяснений введём, подобно прежнему, обозначения

$$\int \omega(z) = \int_0^{2\pi} \omega(z)\,dz,$$

$$\int_{2k-1} \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \omega(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \omega(z)\,dz + \ldots - \int_{\frac{(2k-1)\pi}{k}}^{2\pi} \omega(z)\,dz,$$

$$\int_{2k} \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \omega(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{3\pi}{2k}} \omega(z)\,dz + \ldots + \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2k}}^{2\pi} \omega(z)\,dz.$$

При таких обозначениях имеем

$$\int_{2k} \sin mz = 0, \quad \int_{2k-1} \cos mz = 0$$

при всех целых положительных значениях m,

$$\int_{2k-1} \sin mz = \frac{4k}{m} \quad \text{и} \quad \int_{2k} \cos mz = (-1)^{\frac{m-k}{2k}} \frac{4k}{m},$$

если $\frac{m}{k}$ — целое нечётное число, и, наконец,

$$\int\limits_{2k-1} \sin mz = \int\limits_{2k} \cos mz = 0$$

в других случаях, когда m — число целое, а отношение $\frac{m}{k}$ не приводится к нечётному целому числу.

Если же мы положим

$$\psi_1(z) = \frac{4}{2\pi},$$

$$\psi_{2k}(z) = \sum \frac{(-1)^g}{k'} \sin \frac{kz}{k'},$$

$$\psi_{2k+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{k'} \cos \frac{kz}{k'},$$

где k' означает все нечётные делители числа k, не содержащие квадратных множителей, g означает число всех простых множителей числа k', наконец, h означает, сколько в k' содержится простых множителей вида $4i+1$, то для каждой функции $\psi_n(z)$ все выражения

$$\int\limits_0 \psi_n(z), \quad \int\limits_1 \psi_n(z), \quad \int\limits_2 \psi_n(z), \quad \ldots$$

приведутся к нулю, кроме одного

$$\int\limits_{n-1} \psi_n(z),$$

равного 4.

На этом основании для всякой функции вида

$$\Phi(z) = p_1 + p_2 \sin z + p_3 \cos z + p_4 \sin 2z + \ldots,$$

состоящей из конечного числа членов, можно написать формулу

$$4\Phi(z) = \psi_1(z)\int\limits_0 \Phi(z) + \psi_2(z)\int\limits_1 \Phi(z) + \psi_3(z)\int\limits_2 \Phi(z) + \ldots,$$

каждый член которой вычисляется независимо от остальных.

Выпишем подробно первые пять членов последней формулы, которая может служить для приближённого определения функции $\Phi(z)$ при весьма большом числе данных:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(z)\,dz+\frac{1}{4}\sin z\left\{\int_0^{\pi}\Phi(z)\,dz-\int_{\pi}^{2\pi}\Phi(z)\,dz\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}\cos z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\Phi(z)\,dz+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\Phi(z)\,dz\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Phi(z)\,dz+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\Phi(z)\,dz\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\Phi(z)\,dz+\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\Phi(z)\,dz-\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\Phi(z)\,dz+\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\Phi(z)\,dz\right\}+\ldots$$

9 января 1897 года.

10. О КОРНЯХ УРАВНЕНИЯ $e^{x^2}\dfrac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0$

Теорема 1. *Все корни уравнения*

$$e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0 \tag{1}$$

содержатся между

$$-\frac{m}{\sqrt{\ln m}} \quad \text{и} \quad +\frac{m}{\sqrt{\ln m}}.$$

Доказательство. Заменяя в равенстве

$$(-1)^m e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1}(2x)^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2}(2x)^{m-4}-\ldots$$

произведения

$$m(m-1)(m-2)(m-3),$$
$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5),\ldots$$

соответственно через

$$m^4-6m^3,\quad m^6+15m^5,\quad m^8-28m^7,\quad m^{10}+45m^9,\ \ldots,$$

мы получим неравенство

$$\frac{e^{x^2}}{(-2x)^m}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}>1-t+\frac{t^2}{1\cdot 2}-\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots$$
$$\ldots-\frac{3}{m}t^2\left\{1+\frac{5\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 6}t+\frac{7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}t^2+\frac{9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}t^3+\ldots\right\},$$

где t означает $\dfrac{m^2}{4x^2}$.

Сумма

$$1-t+\frac{t^2}{1\cdot 2}-\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots$$

равна e^{-t}, а значение суммы

$$1+\frac{5\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 6}t+\frac{7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}t^2+\frac{9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}t^3+\ldots$$

меньше, чем e^t.

Таким образом, из предыдущего неравенства следует более простое неравенство

$$\frac{e^{x^2}}{(-2x)^m}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}>e^{-t}\left(1-\frac{3}{m}t^2e^{2t}\right).$$

С другой стороны, если

$$t\leqslant\frac{\ln m}{4},$$

то

$$\frac{3}{m}t^2e^{2t}\leqslant\frac{3}{16}\frac{(\ln m)^2}{\sqrt{m}}<1.$$

Поэтому выражение

$$\frac{e^{x^2}}{(-x)^m}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

имеет положительное значение для всех значений x, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{m^2}{4x^2}\leqslant\frac{\ln m}{4},$$

или

$$|x|\geqslant\frac{m}{\sqrt{\ln m}},$$

откуда немедленно вытекает теорема 1.

Теорема 2. *При достаточно больших значениях m уравнение* (1) *имеет корни в любом заданном интервале.*

Доказательство. Пусть a и b — два заданных положительных числа.

Мы предполагаем эти числа положительными только для упрощения выкладок; легко видеть, что это ограничение не влияет на общность наших выводов.

Обозначив через c наибольший корень уравнения (1), положим

$$(c+a)(c+b)=d, \quad (x-a)(b-x)=z$$

и

$$\Omega(x)=\left\{\cos\mu\arccos\frac{2z+d}{d}\right\}^2,$$

где μ — целое число, равное $\frac{m-1}{2}$ или $\frac{m-2}{2}$.

Известно, что функции

$$e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

можно рассматривать как знаменатели подходящих дробей непрерывной дроби, соответствующей интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{x-t}\,dt.$$

Поэтому, если обозначить через

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

все корни уравнения (1) и определить соответствующие коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_m$ по формулам

$$A_i=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}\varphi(t)}{(t-x_i)\,\varphi'(x_i)}\,dt,$$

где

$$\varphi(x)=e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m},$$

то, по известному свойству непрерывных дробей, мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\Omega(x)\,dx=\sum A_i\Omega(x_i),$$

ибо степень полинома $\Omega(x)$ меньше чем $2m$.

Коэффициенты A_i суть положительные числа и

$$A_1+A_2+\ldots+A_m=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Предположим теперь, что уравнение (1) не имеет корней в интервале (a, b). Тогда все числа x_i удовлетворяют неравенствам

$$b<x_i<c \quad \text{или} \quad -c<x_i<a,$$

и все числа

$$z_i=(x_i-a)(b-x_i)$$

заключены между 0 и $-d$, откуда следуют неравенства

$$-1<\frac{2z_i+d}{d}<+1, \quad \Omega(x_i)<1$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\Omega(x)\,dx=\sum A_i\Omega(x_i)<\sum A_i=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

В то же время легко видеть, что функция $\Omega(x)$ имеет положительное значение для всех значений x и удовлетворяет неравенству

$$\Omega(x)>4\mu(\mu-1)\frac{(c-a)(b-x)}{(c+a)(c+b)}$$

для значений x, заключённых между a и b.

В самом деле, равенство, определяющее $\Omega(x)$, сводится к следующему:

$$\Omega(x)=$$

$$=\left\{\frac{\left(\frac{2z+d}{d}+\sqrt{\left(\frac{2z+d}{d}\right)^2-1}\right)^{\mu}+\left(\frac{2z+d}{d}-\sqrt{\left(\frac{2z+d}{d}\right)^2-1}\right)^{\mu}}{2}\right\}^2.$$

Если $a<x<b$, то

$$\frac{2z+d}{d}>1,\quad \sqrt{\left(\frac{2z+d}{d}\right)^2-1}>2\sqrt{\frac{z}{d}}$$

и, следовательно,

$$\Omega(x)>\left\{\frac{\left(1+2\sqrt{\frac{z}{d}}\right)^{\mu}+\left(1-2\sqrt{\frac{z}{d}}\right)^{\mu}}{2}\right\}>$$

$$>\left[1+2\mu(\mu-1)\frac{z}{d}\right]^2>4\mu(\mu-1)\frac{z}{d}.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\Omega(x)\,dx>\frac{4\mu(\mu-1)}{(c+a)(c+b)}\int_a^b e^{-x^2}(x-a)(b-x)\,dx.$$

Сравнивая это неравенство с предыдущим неравенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\Omega(x)\,dx<\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx,$$

мы найдём, что отношение

$$\frac{(c+a)(c+b)}{4\mu(\mu-1)}$$

больше, чем отношение

$$\frac{\int_a^b e^{-x^2}(x-a)(b-x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx}.$$

Но, в силу теоремы 1, отношение

$$\frac{(c+a)(c+b)}{4\mu(\mu-1)}$$

должно стремиться к нулю, когда m неограниченно возрастает.

Следовательно, наше предположение, что уравнение (1) не имеет корней в интервале (a, b), не может выполняться для достаточно больших значений m; теорема, таким образом, доказана.

Теорема 3. *Положим*

$$\varphi(x) = e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} e^{-t^2}\, dt.$$

Сумма

$$\sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

распространённая на все корни уравнения (1), *заключённые в данном интервале* (α, β), *при неограниченном возрастании* m *стремится к пределу, равному*

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\, dx.$$

Доказательство. Обозначая через ξ' и ξ'' два корня уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\xi' < \alpha < \xi''$ и наиболее близких к α, и через η' и η'' два корня того же уравнения, удовлетворяющих неравенствам $\eta' < \beta < \eta''$ и наиболее близких к β, мы, как известно, будем иметь неравенства

$$\int_{\xi''}^{\eta'} e^{-x^2}\, dx < \sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} < \int_{\xi'}^{\eta''} e^{-x^2}\, dx.$$

Но, в силу предыдущей теоремы, при $m \to \infty$ числа ξ' и ξ'' должны стремиться к α, а числа η' и η'' — к β.

Следовательно, интегралы

$$\int_{\xi''}^{\eta'} e^{-x^2}\, dx \quad \text{и} \quad \int_{\xi'}^{\eta''} e^{-x^2}\, dx$$

и сумма

$$\sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

заключённая между ними, при неограниченном возрастании m стремятся к пределу

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\,dx.$$

Примечание. Предел

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\,dx$$

суммы

$$\sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

не изменится, если к ней добавить или от неё отнять какое-либо число членов

$$\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

соответствующих корням x_i уравнения (1), наиболее близким к α и β. Например, сумма

$$\sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

распространённая на корни x_i, удовлетворяющие неравенствам $\xi'' < x_i < \eta'$, или на корни x_i, удовлетворяющие неравенствам $\xi' \leqslant x_i \leqslant \eta''$, стремится к тому же пределу

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\,dx,$$

когда m неограниченно возрастает.

Это примечание не требует специального доказательства.

Доказанные нами теоремы о корнях уравнения (1) могут служить для простого доказательства следующего предложения, которое отличается от теоремы П. Л. Чебышева только второстепенными деталями.

Теорема 4. *Если все функции $f_n(x)$ последовательности*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

удовлетворяют неравенству

$$f_n(x) \geqslant 0,$$

а суммы

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x),\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x),\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x),\ \ldots$$

стремятся соответственно к пределам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx,\ \ldots,$$

когда n неограниченно возрастает, то сумма

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x),$$

распространённая на все значения x, заключённые в заданном интервале (α, β), стремится при неограниченном возрастании n к пределу

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\,dx.$$

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, необходимо и достаточно показать, что для достаточно больших значений n разность

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x) - \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\,dx$$

будет по абсолютной величине меньше, чем произвольное сколь угодно малое наперёд заданное число $\varepsilon > 0$.

Сохраняя наши обозначения, введённые в теореме 3 и в примечании, предположим, что для m взято определённое значение, настолько большое, что разности между интегралом

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\,dx$$

и суммами

$$\sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}\ (\xi'' < x_i < \eta') \quad \text{и} \quad \sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}\ (\xi' \leqslant x_i \leqslant \eta'')$$

по абсолютному значению стали меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$; по теореме 3 это возможно.

После этого рассмотрим подходящие дроби для непрерывной дроби, соответствующей сумме

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{x-t},$$

т. е. ряду

$$\frac{1}{x}\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) + \frac{1}{x^2}\sum_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) + \frac{1}{x^3}\sum_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) + \ldots;$$

обозначим через

$$\frac{\bar{\psi}(x)}{\bar{\varphi}(x)}$$

одну из этих подходящих дробей, определяя её требованием, чтобы степень $\bar{\varphi}(x)$ была равна m.

Коэффициенты дроби

$$\frac{\bar{\psi}(x)}{\bar{\varphi}(x)}$$

являются рациональными функциями от количеств

$$\alpha_0 = \sum f_n(x),\ \alpha_1 = \sum x f_n(x),\ \ldots,\ \alpha_{2m-1} = \sum x^{2m-1} f_n(x)$$

и, следовательно, корни уравнения

$$\bar{\varphi}(x)=0$$

являются алгебраическими функциями от этих количеств.

Но количества

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2m-1}$$

стремятся соответственно к пределам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx,\quad \ldots,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx,$$

когда n неограниченно возрастает.

Отсюда следует, что корни

$$\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_m$$

уравнения

$$\bar{\varphi}(x)=0$$

отличаются от соответствующих корней

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

уравнения

$$\varphi(x)=0$$

на величины сколь угодно малые, когда n достаточно велико; $\bar{x}_i$ и x_i являются соответствующими корнями уравнений

$$\bar{\varphi}(x)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(x)=0,$$

если положить

$$\bar{x}_1<\bar{x}_2<\ldots<\bar{x}_m \quad \text{и} \quad x_1<x_2<\ldots<x_m.$$

По той же причине разность

$$\frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)}-\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

стремится к нулю для каждой пары соответствующих корней $\bar{x}_i$ и x_i, когда n неограниченно возрастает.

Следовательно, для достаточно больших значений n разность между

$$\sum \frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} \quad (\bar{\xi}'' < \bar{x}_i < \bar{\eta}') \quad \text{и} \quad \sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} \quad (\xi'' < x_i < \eta')$$

и разность между

$$\sum \frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} \quad (\bar{\xi}' \leqslant \bar{x}_i \leqslant \bar{\eta}'') \quad \text{и} \quad \sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} \quad (\xi' \leqslant x_i \leqslant \eta'')$$

будут по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$; здесь $\bar{\xi}'$, $\bar{\xi}''$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$ — корни уравнения

$$\bar{\varphi}(x) = 0,$$

соответствующие корням ξ', ξ'', η', η'' уравнения $\varphi(x) = 0$

С другой стороны, по известным свойствам подходящих к непрерывной дроби, для суммы

$$\sum \frac{f_n(t)}{x - t}$$

должны иметь место неравенства

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x) > \sum \frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} \quad (\bar{\xi}'' < \bar{x}_i < \bar{\eta}')$$

и

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x) < \sum \frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} \quad (\bar{\xi}' \leqslant \bar{x}_i \leqslant \bar{\eta}'').$$

Отсюда следует, что для достаточно больших значений n сумма $\sum\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)$ больше, чем

$$\int_{\alpha} e^{-x^2}\, dx - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

и меньше, чем

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\, dx + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

После того как теорема 4 доказана, как заметил Чебышев*), почти немедленно получается следующее важное предложение теории вероятностей:

Вероятность, что сумма

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

независимых величин

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$$

содержится между

$$\alpha\sqrt{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} \quad \text{и} \quad \beta\sqrt{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *математические ожидания величин*

$$u_1^2,\ u_2^2,\ \ldots,\ u_n^2$$

и α *и* β — *две какие-либо заданные величины, стремится при неограниченном возрастании* n *к пределу, равному*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2}\, dx,$$

если бесконечная последовательность независимых величин

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) *математические ожидания величин*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$$

равны нулю;

2) *математические ожидания величин*

$$u_k^2,\ u_k^3,\ u_k^4,\ \ldots$$

---

*) П. Чебышев, О двух теоремах относительно вероятностей. Приложение № 6 к LV тому Записок Академии Наук. [См. также «Избранные математические труды П. Л. Чебышева». (*Ред*).]

остаются конечными для конечных значений k и в случае, когда k неограниченно возрастает;

3) *математическое ожидание величины*

$$u_k^2$$

не делается бесконечно малым, когда k неограниченно возрастает.

В самом деле, чтобы доказать это предложение, достаточно, в силу теоремы 4, доказать, что математические ожидания величин

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}}, \quad \left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}}\right)^2,$$
$$\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}}\right)^3, \ldots$$

стремятся соответственно к пределам

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx, \ldots,$$

когда n неограниченно возрастает и выполняются вышеуказанные условия.

Но соображения, с помощью которых Чебышев доказал это свойство математических ожиданий, могут быть заменены другими, более простыми и в то же время строгими, как я показал в своих письмах к Васильеву, проф. Казанского университета *).

Заканчивая, я должен заметить, что до исследований Чебышева предложение о пределе вероятности было доказано только для самых простых частных случаев.

---

*) Известия Казанского физико-математического общества, 1898, VIII. См. также Poincaré, Calcul des Probabilités p. 169—186.

11. ЛЕКЦИИ О ФУНКЦИЯХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ

1. Прежде всего сформулируем точно задачу, которой будем заниматься.

Пусть дана определённого вида функция

$$v = f(x,\ y,\ \ldots,\ z;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n) \tag{1}$$

от независимых переменных $x,\ y,\ \ldots,\ z$ и параметров $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$. Предположим, что точки $(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ с координатами $x,\ y,\ \ldots,\ z$ лежат в заданной конечной, замкнутой области (Ω). Для простоты дальнейших рассуждений сделаем относительно функции (1) следующие предположения: 1) функция (1) непрерывна в области (Ω), 2) функция (1) имеет частные производные первого порядка $f_{p_1},\ f_{p_2},\ \ldots,\ f_{p_n}$, непрерывные в (Ω), 3) функция (1) имеет частные производные второго порядка, взятые по $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$, и эти производные ограничены в области (Ω).

Функция

$$|v| = |f(x,\ y,\ \ldots,\ z;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)| \tag{1*}$$

будет непрерывна в (Ω). Поэтому по известной теореме Вейерштрасса она будет иметь в области (Ω) верхний предел, который обозначим через L, и будет достигать его в одной или нескольких точках. Предположим, что эти точки будут (число их предполагается конечным, что ограничивает несколько выбор функции f):

$$(x_1, y_1, \ldots, z_1), \ldots, (x_\mu, y_\mu, \ldots, z_\mu),$$

так что

$$|f(x_1, y_1, \ldots, z_1; p_1, p_2, \ldots, p_n)| = \ldots$$
$$\ldots = |f(x_\mu, y_\mu, \ldots, z_\mu; p_1, p_2, \ldots, p_n)| = L.$$

Число L назовём уклонением функции v от нуля. Если, как мы предполагаем, вид функции f и область (Ω) заданы, то L зависит от значений параметров $p_1, p_2, \ldots, p_n$; при разных значениях этих параметров L будет иметь, вообще говоря, разные значения. Задача о нахождении функции (1), наименее уклоняющейся от нуля, состоит в отыскании, если возможно, таких значений для параметров $p_1, p_2, \ldots, p_n$, чтобы уклонение L было наименьшим.

Решение этой задачи представляет большой теоретический и практический интерес и оказывается особенно полезным в вопросах о приближённых представлениях заданных функций функциями более простого вида.

Такими вопросами впервые занялся Понселе и вполне решил задачу, которая сводится к разысканию функции вида

$$f(x) = \frac{p_1 x + p_2}{\sqrt{1 + x^2}} - 1,$$

наименее уклоняющейся от нуля, когда переменное x лежит в заданном промежутке.

Но разработка общих приёмов для решения таких задач и применение их к различным частным случаям принадлежат, главным образом, Чебышеву и его ученикам.

2. Прежде чем изложить теорему, лежащую в основе исследований Чебышева, докажем одну алгебраическую лемму. Положим, что даны линейные функции от переменных $\xi, \eta, \ldots, \zeta$:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1\xi + B_1\eta + \ldots + C_1\zeta \equiv V_1(\xi, \eta, \ldots, \zeta),\\
&A_2\xi + B_2\eta + \ldots + C_2\zeta \equiv V_2(\xi, \eta, \ldots, \zeta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_\mu\xi + B_\mu\eta + \ldots + C_\mu\zeta \equiv V_\mu(\xi, \eta, \ldots, \zeta),
\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

между которыми нет линейной зависимости, т. е. не существует таких чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$, не равных нулю одновременно, для которых тождественно:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_\mu V_\mu = 0.$$

Я утверждаю, что переменным $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ можно дать такие значения $\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0$, чтобы $V_1(\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0)$, $V_2(\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0)$, $\ldots$, $V_\mu(\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0)$ получились равными любым заданным числам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$.

Когда система (А) состоит из одной только функции $V_1(\xi, \eta, \ldots, \zeta)$, то справедливость утверждения почти очевидна. В самом деле, если не существует такого множителя $\lambda_1 \neq 0$, для которого было бы тождественно $\lambda_1 V_1 = 0$, то числа $A_1, B_1, \ldots, C_1$ не равны нулю одновременно; можно поэтому предположить, не нарушая общности, что $A_1 \neq 0$. Тогда, взяв для $\eta, \ldots, \zeta$ произвольные значения $\eta_0, \ldots, \zeta_0$ и определив ξ_0 из уравнения

$$A_1 \xi + \{B_1 \eta_0 + \ldots + C_1 \zeta_0\} = \alpha_1,$$

что всегда возможно, мы и найдём, что $V_1(\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0) = \alpha_1$.

Положим теперь, что наше утверждение справедливо для $\mu - 1$ функций и докажем, что оно остаётся справедливым и для μ функций. В функции $V_\mu(\xi, \eta, \ldots, \zeta)$ системы (А) не все коэффициенты равны нулю; ибо в этом случае мы могли бы взять $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{\mu-1} = 0$, а λ_μ произвольным, и равенство $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_\mu V_\mu = 0$ имело бы место тождественно, что противоречит предположению. Без ущерба для общности допустим, что $A_\mu \neq 0$, и составим ряд функций

$$\left.\begin{array}{l} V_1'(\eta, \ldots, \zeta) \equiv V_1(\xi, \eta, \ldots, \zeta) - \dfrac{A_1}{A_\mu} V_\mu(\xi, \eta, \ldots, \zeta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\mu-1}'(\eta, \ldots, \zeta) \equiv V_{\mu-1}(\xi, \eta, \ldots, \zeta) - \dfrac{A_{\mu-1}}{A_\mu} V_\mu(\xi, \eta, \ldots, \zeta), \end{array}\right\} \text{(B)}$$

не содержащих ξ и линейных относительно $\eta, \ldots, \zeta$. Эти функции будут линейно независимыми. В самом деле, если бы возможно было равенство

$$\lambda_1' V_1' + \ldots + \lambda_{\mu-1}' V_{\mu-1}' = 0$$

при $\lambda_1', \ldots, \lambda_{\mu-1}'$ не равных 0 одновременно, то, взяв

$$\lambda_1 = \lambda_1', \ \ldots, \ \lambda_{\mu-1} = \lambda_{\mu-1}',$$

$$\lambda_\mu = -\frac{A_1\lambda_1' + \ldots + A_{\mu-1}\lambda_{\mu-1}'}{A_\mu},$$

мы получили бы равенство

$$\lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_{\mu-1} V_{\mu-1} + \lambda_\mu V_\mu = 0,$$

что невозможно, так как не все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ равны нулю. Но если функции (B) линейно независимы, то, по предположению, переменным $\eta, \ldots, \zeta$ можно дать такие значения $\eta_0, \ldots, \zeta_0$, чтобы выполнялись равенства

$$\left.\begin{aligned} V_1'(\eta_0, \ \ldots, \ \zeta_0) &= \alpha_1 - \frac{A_1}{A_\mu}\alpha_\mu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\mu-1}'(\eta_0, \ \ldots, \ \zeta_0) &= \alpha_{\mu-1} - \frac{A_{\mu-1}}{A_\mu}\alpha_\mu. \end{aligned}\right\} \quad \text{(C)}$$

Если ещё определить ξ_0 из уравнения

$$A_\mu\xi + (B_\mu\eta_0 + \ldots + C_\mu\zeta_0) = \alpha_\mu$$

и принять во внимание равенства (B), то станет ясным, что

$$V_1(\xi_0, \ \eta_0, \ \ldots, \ \zeta_0) = \alpha_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_\mu(\xi_0, \ \eta_0, \ \ldots, \ \zeta_0) = \alpha_\mu.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Доказанная лемма может быть, очевидно, высказана ещё так: *если уравнениям*

$$A_1\lambda_1 + \ldots + A_\mu\lambda_\mu = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1\lambda_1 + \ldots + C_\mu\lambda_\mu = 0$$

нельзя удовлетворить иначе, как полагая $\lambda_1 = \ldots = \lambda_\mu = 0$, *то переменным* $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ *можно дать значения* $\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0$, *при которых*

$$\begin{gathered} V_1(\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0) = \alpha_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_\mu(\xi_0, \eta_0, \ldots, \zeta_0) = \alpha_\mu, \end{gathered}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ — *произвольно заданные числа.*

3. При помощи доказанной леммы нетрудно установить предложение, лежащее в основе исследований Чебышева. Положим, что в точках $(x_1, y_1, \ldots, z_1), \ldots, (x_\mu, y_\mu, \ldots, z_\mu)$ функция

$$|f(x, y, \ldots, z;\, p_1, p_2, \ldots, p_n)|,$$

в которой параметры имеют определённые значения, достигает верхнего предела L. Обозначим через $\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_i, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_i$ значения частных производных $\frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}$ при $x = x_i, \ldots, z = z_i$, где i — одно из чисел $1, 2, \ldots, \mu$. Тогда имеет место теорема: *если параметры* $p_1, \ldots, p_n$ *имеют такие значения, что уравнениям*

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_1 \lambda_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_2 \lambda_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_\mu \lambda_\mu = 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_1 \lambda_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_2 \lambda_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_\mu \lambda_\mu = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_1 \lambda_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_2 \lambda_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_\mu \lambda_\mu = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

нельзя удовлетворить иначе, как полагая $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\mu = 0$, *то функция*

$$v = f(x, y, \ldots, z;\, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

не будет наименее уклоняющейся от нуля.

Для доказательства дадим параметрам $p_1, p_2, \ldots, p_n$ приращения $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots, \Delta p_n$ и докажем, что эти приращения можно подобрать так, чтобы уклонение L' функции

$$v' = f(x, y, \ldots, z;\ p_1 + \Delta p_1,\ p_2 + \Delta p_2, \ldots, p_n + \Delta p_n)$$

было меньше L.

Между функциями v' и v для всех точек области (Ω) имеется соотношение

$$v' = f(x, y, \ldots, z;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) + \\ + \frac{\partial f}{\partial p_1}\Delta p_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\Delta p_n + P(\Delta p_1, \ldots, \Delta p_n), \qquad \text{(E)}$$

где через $P(\Delta p_1, \ldots, \Delta p_n)$ обозначена некоторая квадратичная форма от $\Delta p_1, \ldots, \Delta p_n$.

Принимая во внимание условия теоремы и лемму 2, мы заключаем, что можно найти числа $\xi, \eta, \ldots, \zeta$, для которых

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_1 \eta + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_1 \zeta = \alpha_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_\mu \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_\mu \eta + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_\mu \zeta = \alpha_\mu,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ — пока совершенно произвольные числа. Мы возьмём за α_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ произвольное число $(\neq 0)$, имеющее знак, противоположный знаку $f(x_i, y_i, \ldots, z_i;\ p_1, p_2, \ldots, p_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$. Область (Ω) разобьём на отдельные области следующим образом. Около каждой из точек $(x_i, y_i, \ldots, z_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, \mu$, выделим область (Ω_i), к которой отнесём все точки с координатами $x, y, \ldots, z$, удовлетворяющими условиям

$$|x - x_i| \leqslant h_i,\ |y - y_i| \leqslant h_i,\ \ldots,\ |z - z_i| \leqslant h_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

и возьмём h_i столь малым, чтобы величины

$$f(x, y, \ldots, z;\ p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\xi + \frac{\partial f}{\partial p_2}\eta + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\zeta$$

сохраняли (не обращаясь в 0) свой знак во всех точках области (Ω_i); это сделать всегда возможно на основании непрерывности функций $f, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}$. Область, остающуюся по выделении областей $(\Omega_1), (\Omega_2), \ldots, (\Omega_\mu)$, обозначим через (Ω').

Обозначим через ω положительное число, пока ещё ближе не определённое, и положим

$$\Delta p_1 = \xi\omega, \quad \Delta p_2 = \eta\omega, \quad \ldots, \quad \Delta p_n = \zeta\omega.$$

Тогда из (E) получим

$$v' = f(x, y, \ldots, z; p_1, p_2, \ldots, p_n) + \\ + \omega\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\xi + \frac{\partial f}{\partial p_2}\eta + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\zeta\right) + \omega^2 R, \qquad (E')$$

где R ограничена в области (Ω). Пусть высший предел для $|R|$ в области Ω будет K. Докажем, что ω всегда можно выбрать так, чтобы

$$L - |v'| = \\ = L - |f(x, y, \ldots, z; p_1 + \xi\omega, p_2 + \eta\omega, \ldots, p_n + \zeta\omega)|$$

было положительным во всех точках области (Ω).

Докажем это сперва для областей $(\Omega_1), \ldots, (\Omega_\mu)$. Возьмём область (Ω_i) $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ и обозначим через M_i верхний, через m_i нижний пределы величины $\left|\frac{\partial f}{\partial p_1}\xi + \frac{\partial f}{\partial p_2}\eta + \ldots \right.$ $\left. \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\zeta\right|$ в этой области. Так как предел m_i достигается, а $\frac{\partial f}{\partial p_1}\xi + \frac{\partial f}{\partial p_2}\eta + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\zeta$ не обращается в нуль в области (Ω_i), то, очевидно, $m_i \neq 0$. Обозначим ещё через μ_i нижний предел величины $|f(x, y, \ldots, z; p_1, \ldots, p_n)|$ в (Ω_i), причём $\mu_i \neq 0$, так как, очевидно, можно предполагать, что $L \neq 0$. Определим число ω из условий

$$\omega < 1, \quad \omega < \frac{m_i}{K}, \quad \omega < \frac{\mu_i}{M_i + K} \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu);$$

тогда для всех точек области (Ω_i), как мы это докажем, будет выполняться неравенство

$$L - |v'| > 0,$$

Неравенство $K\omega < m_i$ показывает, что величина $\frac{\partial f}{\partial p_1}\xi + \ldots$ $\ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\zeta + \omega R$ имеет знак величины $\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_i \xi + \ldots$ $\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_i \zeta$ и никогда не обращается в нуль, если точка $(x, y, \ldots, z)$ не выходит из (Ω_i).

Неравенства $\omega < 1$, $(M_i + K)\omega < \mu_i$ показывают, что

$$\left|\omega\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\xi + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\zeta\right) + \omega^2 R\right| <$$
$$< |f(x, y, \ldots, z; p_1, p_2, \ldots, p_n)|$$

для всех точек области. Принимая всё это во внимание, видим, что для всех точек области (Ω_i)

$$|v'| < |f(x, y, \ldots, z; p_1, p_2, \ldots, p_n)| \leqslant L,$$

т. е.

$$L - |v'| > 0.$$

Остаётся доказать это неравенство для точек области (Ω'). Обозначим через M верхний предел величины $\left|\frac{\partial f}{\partial p_1}\xi + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\xi\right|$ в области (Ω) и через Δ — верхний предел величины $|f(x, y, \ldots, z; p_1, p_2, \ldots, p_n)|$ — в области (Ω').

Я говорю, что $L - \Delta > 0$. В самом деле, положительная функция $L - |f(x, y, \ldots, z; p_1, \ldots, p_n)|$ имеет в области (Ω') нижний предел и достигает его в некоторых точках области (Ω'), но ни в одной из них функция эта не обращается в нуль, так как равенство $L = |f(x, y, \ldots, z; p_1, \ldots, p_n)|$ выполняется только в точках $(x_1, y_1, \ldots, z_1), \ldots, (x_\mu, y_\mu, \ldots, z_\mu)$, лежащих вне области (Ω'). Следовательно, $L - \Delta = \alpha > 0$. Из (E') видим, что

$$|v'| \leqslant \Delta + \omega(M + K\omega) = L - [\alpha - \omega(M + K\omega)]$$

для всех точек (Ω'); поэтому если взять

$$\omega < 1, \quad \omega < \frac{\alpha}{M+K},$$

то

$$L - |v'| > 0$$

для всех точек области (Ω').

Итак, приращения $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots, \Delta p_n$ оказалось возможным выбрать так, чтобы во всех точках области (Ω) выполнялось неравенство $L - |v'| > 0$, откуда видно, что верхний предел величины $|v'|$ в области (Ω) меньше L, так что уклонение L' функции

$$f(x, y, \ldots, z;\ p_1 + \Delta p_1, \ldots, p_n + \Delta p_n)$$

будет действительно меньше уклонения L функции

$$f(x, y, \ldots, z;\ p_1, \ldots, p_n),$$

что и доказывает теорему Чебышева, высказанную в начале этого n°.

4. Теорема Чебышева может, вообще говоря, дать ответ только на вопрос: когда при данной системе параметров функция не будет наименее уклоняющейся от нуля? В простых сравнительно случаях эта теорема позволяет узнать, какие значения должны иметь параметры, чтобы функция могла быть наименее уклоняющейся от нуля. Но что при этих значениях параметров она действительно наименее уклоняется от нуля, — это в каждом отдельном случае должно быть доказано особо. Поэтому при рассмотрении различных частных случаев проще будет вместо теоремы Чебышева установить такие предложения, которые дадут систему необходимых и достаточных условий для того, чтобы функция уклонялась от нуля менее, чем всякая другая функция того же вида.

Займёмся сначала первым из частных случаев, рассматриваемых Чебышевым в мемуаре «Sur les questions des minima». Положим, что дана какая-нибудь функция $\varphi(x)$, непрерывная в замкнутом конечном интервале $[a, b]$; требуется представить её в этом интервале приближённо в виде полинома $p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$ так, чтобы погрешность

$$f(x) = \varphi(x) - p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \ldots - p_n$$

наименее уклонялась от нуля.

Пусть L — уклонение функции $f(x)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ — различные значения переменного из интервала $[a, b]$, расположенные в возрастающем порядке, при которых числовое значение $f(x)$ получается равным L. Составим ряд чисел, не равных нулю,

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_\mu) \tag{A}$$

и обозначим через ν число перемен знака в этом ряду.

Тогда имеет место теорема: *если* $\nu < n$, *то функция* $f(x)$ *не будет наименее уклоняющейся от нуля; если же* $\nu \geqslant n$, *то, наоборот, функция* $f(x)$ *уклоняется от нуля менее, чем всякая другая функция того же вида.*

Предположим, что в ряду (A) знак меняется в первый раз при переходе от $f(x_{h_1})\,(h_1 \geqslant 1)$ к $f(x_{h_1+1})$, во второй — при переходе от $f(x_{h_2})\,(h_2 \geqslant h_1+1)$ к $f(x_{h_2+1})$, в третий — при переходе от $f(x_{h_3})\,(h_3 \geqslant h_2+1)$ к $f(x_{h_3+1})$ и т. д., наконец, в ν-й раз — при переходе от $f(x_{h_\nu})\,(h_\nu \geqslant h_{\nu-1}+1)$ к $f(x_{h_\nu+1})$. Если положить

$$f(x_1) = \varepsilon L,$$

где $\varepsilon = \pm 1$, то, очевидно, будут иметь место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \ldots = f(x_{h_1}) = \varepsilon L,\\
f(x_{h_1+1}) &= \ldots = f(x_{h_2}) = -\varepsilon L,\\
f(x_{h_2+1}) &= \ldots = f(x_{h_3}) = \varepsilon L,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(x_{h_\nu+1}) &= \ldots = f(x_\mu) = (-1)^\nu \varepsilon L.
\end{aligned}$$

Установив это, переходим к доказательству первой части высказанной теоремы и положим, что $\nu < n$.

Возьмём числа $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_\nu$, выбор которых ограничим условиями

$$\begin{gathered}
x_{h_1} < \xi_1 < x_{h_1+1},\quad x_{h_2} < \xi_2 < x_{h_2+1},\ \ldots\\
\ldots,\ x_{h_\nu} < \xi_\nu < x_{h_\nu+1},
\end{gathered} \tag{B}$$

и составим функцию

$$f_1(x) = f(x) + (-1)^{\nu-1}\lambda\varepsilon(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_\nu)$$

того же вида, что и $f(x)$, так как $\nu \leqslant n-1$; здесь через λ обозначено некоторое положительное, пока ещё ближе не определённое, число. Можно, как мы это покажем, распорядиться этим числом λ так, чтобы уклонение от нуля функции $f_1(x)$ было меньше уклонения L функции $f(x)$. Для этого около каждого из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ выделим по промежутку

$$(x_1-\delta,\ x_1+\delta),\quad (x_2-\delta,\ x_2+\delta), \ldots \\ \ldots, (x_\mu-\delta,\ x_\mu+\delta) \tag{α}$$

и возьмём δ столь малым, чтобы

$$f(x) \text{ и } (x-\xi_1)(x-\xi_2) \ldots (x-\xi_\nu)$$

в каждом из этих промежутков сохраняли, не обращаясь в нуль, свой знак (что всегда возможно, ибо функции $f(x)$ и $(x-\xi_1)(x-\xi_2) \ldots (x-\xi_\nu)$ непрерывные). Обозначим через M_i нижний предел величины $|f(x)|$, а через m_i — верхний предел величины $|(x-\xi_1) \ldots (x-\xi_\nu)|$ в промежутке

$$(x_i-\delta,\ x_i+\delta) \tag{α_i}$$

и подчиним положительное число λ условиям

$$\lambda < \frac{M_i}{m_i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu). \tag{β}$$

Тогда для всех значений x, попадающих в промежутки (α),

$$|f_1(x)| < L. \tag{γ}$$

В самом деле, положим, что x падает в промежуток (α_i), а x_i совпадает с одним из чисел $x_{h_k+1}, \ldots, x_{h_{k+1}}$ (причём, ради однообразия, положено $h_0=0$, $h_{\nu+1}=\mu$). Числа

$$f(x_i) = (-1)^k \varepsilon L \quad \text{и} \quad (-1)^{\nu-1} \varepsilon \lambda (x_i-\xi_1) \ldots (x_i-\xi_\nu)$$

будут иметь противные знаки, так как на основании неравенств (В) первые k множителей $x_i-\xi_1, x_i-\xi_2, \ldots, x_i-\xi_k$ положительны, а остальные, числом $\nu-k$, отрицательны и, стало быть, знак числа

$$(-1)^{\nu-1} \varepsilon \lambda (x_i-\xi_1) \ldots (x_i-\xi_\nu)$$

одинаков со знаком числа $(-1)^{k-1}\varepsilon\lambda$, т. е. противоположен знаку числа $f(x_i)$. Приняв во внимание, что

$$f(x) \quad \text{и} \quad (-1)^{\nu-1}\varepsilon\lambda(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_\nu)$$

имеют противные знаки в промежутке $(x_i-\delta,\ x_i+\delta)$ и второе по числовому значению меньше первого [на основании (β)], мы легко убеждаемся в справедливости неравенства (γ).

Но то же неравенство будет иметь место для всех значений x, лежащих в интервале $[a, b]$, но вне промежутков (α).

В самом деле, пусть M — верхний предел $|f(x)|$ для всех таких значений x; так как этот предел достигается, а $|f(x)|=L$ только при $x=x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, то ясно, что $M=L-\alpha$, где $\alpha>0$. Если m — верхний предел выражения $|(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_\nu)|$ в рассматриваемой области и λ определено из условия

$$0<\lambda<\frac{\alpha}{m},$$

то

$$|f_1(x)|\leqslant|f(x)|+\lambda|(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_\nu)|\leqslant L-(\alpha-m\lambda)<L$$

для всех значений x, лежащих в интервале $[a, b]$, но вне промежутков (α).

Таким образом, оказалось возможным при $\nu<n$ найти функцию $f_1(x)$ того же вида, что и $f(x)$, но которая уклоняется от нуля менее, чем на L. А это доказывает справедливость первой части теоремы.

Предположим теперь, что $\nu\geqslant n$; тогда функция $f(x)$ будет менее уклоняться от 0, чем всякая другая функция того же вида.

Пусть, в самом деле, уклонение некоторой функции $f_1(x)$ того же вида, что и $f(x)$, будет меньше L. Ясно, что разность

$$f(x)-f_1(x)$$

будет целой функцией степени $n-1$ или меньшей:

$$\varphi(x)=f(x)-f_1(x)=\lambda_1x^{n-1}+\ldots+\lambda_n,$$

где не все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ равны нулю. Из числа всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ выберем значения $x_{h_1} < x_{h_2} < \ldots$ $\ldots < x_{h_\nu} < x_{h_{\nu+1}}$ $(h_{\nu+1} = \mu)$ и составим числа

$$\varphi(x_{h_1}), \ \varphi(x_{h_2}), \ \ldots, \ \varphi(x_{h_\nu}), \ \varphi(x_{h_{\nu+1}}). \qquad (C)$$

Так как

$$f(x_{h_1}) = \varepsilon L, \quad f(x_{h_2}) = -\varepsilon L, \ \ldots, \ f(x_{h_{\nu+1}}) = (-1)^\nu \varepsilon L,$$

а $|f_1(x)|$ ни при каком значении x в интервале $[a, b]$ не достигает величины L, то ясно, что в ряду (C) каждые два смежных числа имеют противные знаки. Поэтому функция $\varphi(x)$ при переходе от a до b меняет знак по меньшей мере $\nu \geqslant n$ раз, что невозможно.

Таким образом, функция $f(x)$ действительно наименее уклоняется от нуля.

Докажем ещё, что нет другой функции, уклонение которой от нуля было бы равно L. Если такая функция $f_1(x)$ существует, то числа (C) или отличны от 0 и знаки их чередуются или среди них есть равные нулю. В том и другом случаях уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет в интервале $[a, b]$ по меньшей мере $\nu \geqslant n$ корней (считая корень кратности i за i корней). В первом случае это очевидно. Во втором случае положим, например, что i чисел $\varphi(x_{h_k}), \ldots, \varphi(x_{h_{k+i-1}})$ равны нулю, но числа $\varphi(x_{h_{k-1}})$ и $\varphi(x_{h_{k+i}}) \neq 0$; если i нечётное, то знаки чисел $\varphi(x_{h_{k-1}})$ и $\varphi(x_{h_{k+i}})$ одинаковы, следовательно, число корней уравнения $\varphi(x) = 0$, лежащих в промежутке $(x_{h_{k-1}}, x_{h_{k+i}})$, чётное и потому $\geqslant i+1$. Но $i+1$ есть число промежутков

$$(x_{h_{k-1}}, x_{h_k}), \ \ldots, \ (x_{h_{k+i-1}}, x_{h_{k+i}}). \qquad (D)$$

Точно так же докажем, что при i чётном число корней уравнения $\varphi(x) = 0$ между $x_{h_{k-1}}$ и $x_{h_{k+i}}$ не меньше числа промежутков (D). Отсюда далее легко заключить, что число корней уравнения $\varphi(x) = 0$ от x_{h_1} до $x_{h_{\nu+1}}$ не меньше $\nu \geqslant n$; но это возможно лишь тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны 0, чего, однако, нет.

Таким образом, может существовать только одна функция $f(x)$, наименее уклоняющаяся от нуля.

5. Чтобы пояснить на простом сравнительно примере применение только что доказанной теоремы, положим $\varphi(x)=x^n$; наша задача тогда приведётся к разысканию таких значений для параметров $p_1, p_2, \ldots, p_n$, при которых функция

$$y=f(x)=x^n-p_1x^{n-1}-p_2x^{n-2}-\ldots-p_n \qquad (\alpha)$$

наименее уклоняется от нуля в данном интервале $[a, b]$.

Заметим, что без ущерба для общности можно положить $a=-h$, $b=h$, понимая под h некоторое данное число (например $h=1$). В самом деле, если ввести вместо x новое переменное z, связанное с x равенством

$$x=\frac{b-a}{2h}z+\frac{a+b}{2},$$

то, очевидно, при переходе x от a до b z будет изменяться от $-h$ до h. Но ясно, что при такой замене переменных характер решаемого вопроса не меняется; поэтому ничто не мешает предположить, что $a=-h$, $b=h$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ — все различные значения x в интервале $[-h, h]$, при которых функция (α) достигает наибольшего числового значения L. Число μ не превышает $n+1$; действительно, равенство

$$\psi(x)\equiv[f(x)]^2-L^2=0 \qquad (\beta)$$

возможно или тогда, когда x имеет одно из предельных значений $-h$, h, или тогда, когда x удовлетворяет уравнению

$$f'(x)\equiv nx^{n-1}-(n-1)p_{n-1}x^{n-2}-\ldots-p_{n-1}=0, \qquad (\gamma)$$

которое имеет не более $n-1$ корней. Таким образом, $\mu\leqslant n+1$, причём равенство возможно только тогда, когда, во-первых, все корни уравнения (γ) вещественны, различны и лежат внутри промежутка $(-h, h)$ и, во-вторых, $-h$ и h принадлежат к числу тех значений x, при которых достигается наибольшее уклонение L.

Положим, что функция (α) наименее уклоняется от нуля; тогда (n° 4) число перемен знака в ряду

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_\mu)$$

не меньше n, следовательно, $\mu = n+1$. Каждый корень ξ уравнения (γ) будет двойным корнем уравнения (β); действительно, ξ, очевидно, удовлетворяет уравнению (β), и притом имеет место равенство

$$\psi'(\xi) \equiv 2f(\xi)f'(\xi) = 0.$$

Отсюда легко заключить, что $\psi(x)$ делится на $[f'(x)]^2$; но $\psi(x)$ делится ещё на $(x+h)(x-h) = x^2-h^2$; следовательно, $\psi(x)$ делится на $(x^2-h^2)[f'(x)]^2$, так как x^2-h^2 и $[f'(x)]^2$ — функции взаимно простые. Частное $\frac{\psi(x)}{(x^2-h^2)[f'(x)]^2}$ приводится к постоянному, ибо степени функций $\psi(x)$ и $(x^2-h^2)[f'(x)]^2$ одинаковы ($=2n$); это постоянное, очевидно, равно $\frac{1}{n^2}$, так что

$$\psi(x) = [f(x)]^2 - L^2 = \frac{x^2-h^2}{n^2}[f'(x)]^2$$

или

$$[f(x)]^2 - L^2 = (x^2-h^2)[\varphi(x)]^2, \tag{δ}$$

если положить

$$\frac{1}{n}f'(x) = \varphi(x).$$

Из (δ) получаем уравнение

$$[f(x)]^2 - (x^2-h^2)[\varphi(x)]^2 = L^2, \tag{ε}$$

которое позволит найти вид искомой функции $f(x)$. Для этого прежде всего решим такой вопрос: найти целые функции P и Q, степени которых соответственно равны n и $n-1$, удовлетворяющие условию

$$P^2 - (x^2-h^2)Q^2 = \text{const}. \tag{ζ}$$

Положив

$$\left.\begin{aligned} P &= Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots; \quad A \neq 0 \\ Q &= A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots; \quad A' \neq 0 \end{aligned}\right\}, \quad (\eta)$$

находим

$$P^2 - (x^2 - h^2) Q^2 = (A^2 - A'^2) x^{2n} + (2AB - 2A'B') x^{2n-1} + \\ + (B^2 - B'^2 + 2AC - 2A'C' + h^2A'^2) x^{2n-2} + \ldots = \mathrm{const};$$

а так как первая часть этого равенства — число постоянное, то, следовательно, имеют место равенства

$$A^2 - A'^2 = 0; \quad AB - A'B' = 0;$$
$$B^2 - B'^2 + 2AC - 2A'C' + h^2A'^2 = 0; \ \ldots$$

Можно, не нарушая общности, предположить, что числа A и A' одного знака; в этом предположении первое из предыдущих равенств даст:

$$A = A'. \qquad (\theta_1)$$

Приняв это во внимание, из второго найдём

$$B = B' \qquad (\theta_2)$$

и, наконец, из третьего

$$2C - 2C' + h^2A = 0. \qquad (\theta_3)$$

Найдём теперь целые функции $P^{(1)}$ и $Q^{(1)}$ из уравнения

$$P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{x^2 - h^2} = (P + Q\sqrt{x^2 - h^2})(x - \sqrt{x^2 - h^2}), \qquad (\mathrm{I}_1)$$

которое даёт

$$\left.\begin{aligned} P^{(1)} &= Px - Q(x^2 - h^2), \\ Q^{(1)} &= Qx - P. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{K})$$

Подставляя сюда на место P и Q их выражения (η) и принимая во внимание равенства (θ_1), (θ_2) и (θ_3), получим:

$$P^{(1)} = (C' - C)\,x^{n-1} + \ldots,$$
$$Q^{(1)} = (C' - C)\,x^{n-2} + \ldots$$

Равенство (θ_3) показывает, что $C'-C\neq 0$; поэтому степени функций $P^{(1)}$ и $Q^{(1)}$ будут соответственно $n-1$ и $n-2$, и коэффициенты при высших степенях x в $P^{(1)}$ и $Q^{(1)}$ будут равны.

Легко видеть, что $P^{(1)}$ и $Q^{(1)}$ удовлетворяют уравнению (ζ); в самом деле, из (I_1) через замену $\sqrt{x^2-h^2}$ на $-\sqrt{x^2-h^2}$ получаем:

$$P^{(1)}-Q^{(1)}\sqrt{x^2-h^2}= \\ =(P-Q\sqrt{x^2-h^2})(x+\sqrt{x^2-h^2}); \qquad (\mathrm{I}_1')$$

перемножая затем почленно (I_1) и (I_1') и принимая во внимание (ζ), заключаем, что $[P^{(1)}]^2-(x^2-h^2)[Q^{(1)}]^2=\mathrm{const}$. Таким образом, функции $P^{(1)}$ и $Q^{(1)}$ во всех отношениях подобны P и Q, только степени их на единицу меньше. Поэтому если определить функции $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, $P^{(3)}$, $Q^{(3)},\ldots$ $\ldots, P^{(n)}$, $Q^{(n)}$ из ряда равенств

$$P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{x^2-h^2}= \\ =(P^{(1)}+Q^{(1)}\sqrt{x^2-h^2})(x-\sqrt{x^2-h^2}), \qquad (\mathrm{I}_2)$$

$$P^{(3)}+Q^{(3)}\sqrt{x^2-h^2}= \\ =(P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{x^2-h^2})(x-\sqrt{x^2-h^2}), \qquad (\mathrm{I}_3)$$

. . . .

$$P^{(n)}+Q^{(n)}\sqrt{x^2-h^2}= \\ =(P^{(n-1)}+Q^{(n-1)}\sqrt{x^2-h^2})(x-\sqrt{x^2-h^2}), \qquad (\mathrm{I}_n)$$

то окажется, что $P^{(n)}$ — постоянное C. Так как, кроме того, $P^{(n)}$ и $Q^{(n)}$ связаны соотношением

$$[P^{(n)}]^2-(x^2-h^2)[Q^{(n)}]^2=\mathrm{const},$$

то ясно, что $Q^{(n)}=0$. Принимая это во внимание, из равенств (I_n), (I_{n-1}), $\ldots$, (I_1) найдем

$$P+Q\sqrt{x^2-h^2}=C'(x-\sqrt{x^2-h^2})^{-n},$$

или, что то же самое,

$$P+Q\sqrt{x^2-h^2}=C(x+\sqrt{x^2-h^2})^n. \qquad (\mathrm{I})$$

Вот равенство, которое даёт все функции P и Q степени n и $n-1$, способные удовлетворить уравнению (ζ). Опираясь на этот результат, мы находим для определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ уравнение

$$f(x)+\varphi(x)\sqrt{x^2-h^2}=C\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^n, \qquad (\lambda)$$

в котором постоянная C определяется из того условия, что коэффициент при x^n в $f(x)$ равен 1. Из (λ) легко находим:

$$f(x)=C\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2}.$$

Но, с другой стороны,

$$(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n=$$

$$=2\left\{x^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(x^2-h^2)+\ldots\right\}=$$

$$=2\left\{x^n\left(1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\ldots\right)+\ldots\right\}=2\left\{2^{n-1}x^n+\ldots\right\};$$

следовательно,

$$f(x)=2^{n-1}Cx^n+\ldots,$$

откуда

$$C=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, мы приходим к заключению: если имеется вообще функция $f(x)$ вида (α), наименее уклоняющаяся от нуля в интервале $[-h, h]$, то

$$f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2^n}. \qquad (\mu)$$

Остаётся показать, что эта функция $f(x)$ уклоняется от нуля менее, чем всякая другая того же вида. Для этого положим

$$x=h\cos\varphi \quad (-h\leqslant x\leqslant h);$$

тогда, воспользовавшись формулой Моавра, легко найти, что

$$f(x)=\frac{h^n}{2^{n-1}}\cos n\varphi.$$

Из этого выражения ясно, что

$$L=\frac{h^n}{2^{n-1}}$$

будет уклонением $f(x)$ от нуля. Наибольшее числовое значение $f(x)$ достигается, очевидно, при $n+1$ следующих значениях x:

$$x_1=h\cos\frac{n\pi}{n},\quad x_2=h\cos\frac{(n-1)\pi}{n},\ \ldots,\ x_{n+1}=h\cos\frac{0\pi}{n},$$

причём, конечно, $-h=x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n+1}=h$. При этих значениях

$$f(x_1)=(-1)^nL,\quad f(x_2)=(-1)^{n-1}L,\ \ldots$$
$$\ldots,\ f(x_{n+1})=L,$$

так что число перемен знака в этом ряду будет n. Поэтому функция (μ) будет действительно наименее уклоняющейся от нуля.

6. Положим, что дана функция $f(x)$, которая представляется сходящимся рядом

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+$$
$$+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots$$

для всех значений x, лежащих в интервале $[-h, h]$; требуется представить её приближённо в виде полинома

$$q_{n-1}x^{n-1}+q_{n-2}x^{n-2}+\ldots+q_0$$

так, чтобы разность

$$f(x)-q_{n-1}x^{n-1}-q_{n-2}x^{n-2}-\ldots-q_0 \qquad (1)$$

наименее уклонялась от нуля в интервале $[-h, h]$. Положив: $q_0=a_0+\varepsilon_0$, $q_1=a_1+\varepsilon_1$, $\ldots$, $q_{n-1}=a_{n-1}+\varepsilon_{n-1}$, мы будем искать поправки $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ под условием, чтобы функция

$$\varphi(x) = -\varepsilon_0 - \varepsilon_1 x - \ldots - \varepsilon_{n-1}x^{n-1} + \\ + a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots \quad (2)$$

в интервале $[-h, h]$ наименее уклонялась от нуля. Нахождение точных величин поправок при всяком заданном n и для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей поставленным условиям, представляет весьма трудный вопрос, от разрешения которого мы очень далеки. Поэтому мы ограничимся разысканием первых приближённых значений поправок $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, когда в выражении (2) отбросим все члены $a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots$, предполагая, что сумма отброшенных членов ничтожно мала. В этом предположении придётся определить числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ под условием, чтобы функция

$$a_n x^n - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 x - \ldots - \varepsilon_{n-1}x^{n-1}$$

наименее уклонялась от нуля. Но решение этого вопроса может быть без труда получено на основании результатов предыдущего n°; в самом деле, из равенства

$$a_n x^n - \varepsilon_{n-1}x^{n-1} - \ldots - \varepsilon_1 x - \varepsilon_0 = \\ = a_n\left(x^n - \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_n}x^{n-1} - \ldots - \frac{\varepsilon_0}{a_n}\right)$$

видно, что функция

$$x^n - \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_n}x^{n-1} - \ldots - \frac{\varepsilon_0}{a_n}.$$

будет наименее уклоняющейся от нуля в интервале $[-h, h]$ и что, следовательно,

$$x^n - \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_n}x^{n-1} - \ldots - \frac{\varepsilon_0}{a_n} = \\ = \frac{1}{2^n}\left\{\left(x + \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n\right\}. \quad (3)$$

Это уравнение вполне определяет искомые числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ для всякого данного n.

Таким образом, получаются первые приближённые значения поправок. Чтобы найти более точные значения поправок, следовало бы в выражении (2) удержать ещё член $a_{n+1}x^{n+1}$, а члены $a_{n+2}x^{n+2}+\ldots$ отбросить; тогда получается задача, которую решил Е. И. Золотарёв (см. его «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее уклоняющихся от нуля» 1877). Но решение Золотарёва, основанное на применении эллиптических функций, слишком сложно для того, чтобы можно было им пользоваться на практике. Поэтому мы не будем больше вдаваться в подробности общего характера и дадим полное решение поставленного вопроса только для частного случая, когда $n=2$ и уравнение $f'(x)-C=0$ имеет не больше одного корня в интервале $(-h, h)$, каково бы ни было C. Положим, что параметры q_0 и q_1 подобраны так, что функция

$$\varphi(x)=f(x)-q_0-q_1x$$

наименее уклоняется от нуля. Если $x_1<x_2<\ldots<x_\mu$ — все значения x в интервале $[-h, h]$, при которых $\varphi(x)$ достигает наибольшего численного значения L, то по доказанному в n° 4 число перемен знака в ряду $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_\mu)$ не менее 2 и, стало быть, $\mu \geqslant 3$. Но при сделанных предположениях μ не может быть больше 3, ибо в этом случае уравнение

$$\varphi'(x)\equiv f'(x)-q_1=0$$

имело бы по крайней мере 2 корня в интервале $(-h, h)$, что противоречит предположению. Следовательно, $\mu=3$; но тогда, очевидно, $x_1=-h$, $x_2=\xi$, где ξ — корень уравнения

$$f'(\xi)-q_1=0,$$

и $x_3=h$. Так как в ряду $\varphi(-h)$, $\varphi(\xi)$, $\varphi(h)$ две перемены знака, то, очевидно, можно положить

$$\varphi(-h)=f(-h)-q_0+q_1h=\varepsilon L, \tag{4a}$$

$$\varphi(h)=f(h)-q_0-q_1h=\varepsilon L, \tag{4b}$$

$$\varphi(\xi)=f(\xi)-q_0-q_1\xi=-\varepsilon L, \tag{4c}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Из (4a) и (4b) находим

$$q_1 = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

и, подставляя сюда

$$f(-h) = a_0 - a_1 h + a_2 h^2 - a_3 h^3 + \ldots;$$
$$f(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots,$$

получим:

$$q_1 = a_1 + a_3 h^2 + a_5 h^4 + \ldots \tag{5}$$

Зная q_1, из уравнения

$$f'(\xi) = q_1$$

или

$$2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \ldots = a_3 h^2 + a_5 h^4 + \ldots$$

определяем ξ; ограничиваясь членами второго порядка относительно h, находим:

$$\xi = \frac{a_3}{2a_2} h^2 + \ldots \tag{6}$$

Из (4b) и (4c), наконец, находим:

$$q_0 = \frac{1}{2}\{f(h) + f(\xi) - q_1(h + \xi)\};$$

отсюда, принимая во внимание (5) и (6) и ограничиваясь членами второго порядка относительно h, получим:

$$q_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 h^2 + \ldots \tag{7}$$

Пример. Положим $h < 1$ и

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots \quad (|x| < 1).$$

Уравнение

$$f'(x) \equiv \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = C$$

в интервале $[-h, h]$ имеет не больше одного корня, следовательно, функция $f(x)$ удовлетворяет всем поставленным для неё условиям. Применяя к данному случаю формулы (5) и (7), находим, предполагая h малым:

$$q_0 = 1 - \frac{1}{16}h^2 + \ldots,$$

$$q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}h^2 + \ldots$$

При этих значениях q_0, q_1 полином $q_0 + q_1 x$ наилучше представляет функцию $\sqrt{1+x}$ в интервале $[-h, h]$ в том смысле, что разность $\sqrt{1+x} - q_0 - q_1 x$ наименее уклоняется от нуля.

7. Обозначим через $\psi(x)$ некоторую данную целую функцию, остающуюся положительной для всех значений x, лежащих в интервале $[-1, 1]$, и поставим себе задачей разыскание той функции вида

$$f(x) = \frac{x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n}{\sqrt{\psi(x)}}, \tag{1}$$

которая в рассматриваемом интервале наименее уклоняется от нуля.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ — все различные значения x, расположенные в возрастающем порядке, при которых $f(x)$ достигает наибольшего числового значения L, и ν — число перемен знака в ряду

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_\mu). \tag{a}$$

Если $\nu < n$, то функция $f(x)$ не будет наименее уклоняющейся от нуля; если же $\nu \geqslant n$, то, наоборот, $f(x)$ уклоняется от нуля менее, чем всякая другая функция того же вида.

Эта теорема совершенно подобна теореме, установленной в n° 4, и доказывается совершенно так же, как эта последняя, ибо знаменатель $\sqrt{\psi(x)}$ в равенстве (1), не обращающийся в нуль, существенной роли при этом не играет.

Указанная теорема позволяет в каждом отдельном случае решить поставленную задачу. Но, чтобы установить общее выражение функций вида (1), при заданном $\psi(x)$, наименее уклоняющихся от нуля, нужно несколько ограничить выбор функций $\psi(x)$; мы, именно, предположим, что степень её не превышает $2n$.

Если параметры $p_1, p_2, \ldots, p_n$ подобраны так, что уклонение L функции $f(x)$ достигает наименьшей величины, то на основании приведённой выше теоремы число перемен знака в ряду (a) не меньше n, т. е. $\mu \geqslant n+1$, и уравнение

$$[f(x)]^2 - L^2 = 0,$$

или, что то же самое, уравнение

$$y^2 - L^2 \psi(x) = 0, \tag{2}$$

где положено

$$y = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n,$$

имеет в интервале $[-1, 1]$ не менее $n+1$ различных вещественных корней. Но уравнение (2) удовлетворяется или тогда, когда x имеет одно из предельных значений $-1, 1$, или тогда, когда x удовлетворяет уравнению

$$f'(x) = 0,$$

т. е. уравнению

$$2y'\psi(x) - y\psi'(x) = 0. \tag{3}$$

Всякий же корень уравнения (3), удовлетворяющий (2), будет двойным корнем последнего; в самом деле, при выполнении (2) и (3) имеем

$$y\,[2yy' - L^2\psi'(x)] = 2y'\,[y^2 - L^2\psi(x)] = 0,$$

откуда (так как y не может быть равно нулю)

$$2yy' - L^2\psi'(x) = 0,$$

что и доказывает утверждение. Степень функции $y^2 - L^2\psi(x)$ не выше $2n$; следовательно, среди чисел $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ ($\mu \geqslant n+1$) имеется не более $n-1$, удовлетворяющих (3), а потому крайние числа x_1 и x_μ будут: $x_1 = -1$, $x_\mu = 1$ и μ будет в точности равно $n+1$. Целая функция $y^2 - L^2\psi(x)$ степени

$2n$ делится на произведение $(x^2-1)(x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2$ тоже степени $2n$; поэтому

$$y^2 - L^2\psi(x) = C(x^2-1)(x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2,$$

где C — некоторое постоянное. Обозначив через z целую функцию

$$z = \sqrt{C}(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

мы получим, наконец, неопределённое уравнение

$$y^2 - (x^2-1)z^2 = L^2\psi(x),$$

которым пользуется Чебышев для разыскания функции y. Но это уравнение имеет несколько решений, из которых остаётся ещё выбрать то, которое даёт решение задачи. Так как все эти исследования являются у Чебышева довольно сложными и решение получается путём угадывания, то проще будет, не останавливаясь на решении указанного уравнения, прямо составить некоторую функцию вида (1) и доказать, что она наименее уклоняется от нуля. Это будет сделано в следующем n°.

8. Так как, по предположению, функция

$$\psi(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + A_l \quad (l \leqslant 2n)$$

не обращается в нуль при $x=0$, то $A_l \neq 0$, и без ущерба для общности можно положить A_l равным 1. Но тогда

$$\psi(x) = (1+a_1x)(1+a_2x)\ldots(1+a_{2n}x), \tag{A}$$

где некоторые числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ могут быть равны нулю, если $l < 2n$. Среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ могут быть и мнимые; но они будут попарно сопряжёнными, если, конечно, как предполагается, функция $\psi(x)$ вещественная. Если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ имеются вещественные, то их числовое значение будет <1; в самом деле, если бы a_i было вещественным и по численному значению >1, то множитель $1+a_i x$, а вместе с ним и функция $\psi(x)$ обращались бы в нуль при x, равном $-\dfrac{1}{a_i}$ и, стало быть, лежащем в промежутке $(-1, 1)$, что невозможно. Установив это, определим числа φ_k для $k=1, 2, \ldots, 2n$ из условий

$$\cos\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+a_k x}},$$

$$\sin\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+a_k x}} \qquad \text{(B)}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

Входящие сюда квадратные корни условимся брать так, чтобы вещественные корни были положительными, а мнимые имели положительную вещественную часть. Равенства (B) сами по себе недостаточны для однозначного определения φ_k; но если, положив $\varphi_k = \alpha_k + i\beta_k$, прибавить условие

$$-\pi < \alpha_k \leqslant \pi,$$

то φ_k сделается однозначной функцией x. Эта функция будет непрерывной для всех значений x, лежащих в интервале $[-1, 1]$. Положив в равенствах (B) $x=-1$, находим

$$\sin\varphi_k = 1, \quad \cos\varphi_k = 0,$$

откуда следует, что $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ при $x=-1$.

Если a_k — вещественное, то и φ_k будет вещественным; если же a_k мнимое, то и φ_k — мнимое; но при a_l, сопряжённом с a_k, число φ_l будет сопряжённым с φ_k, так что сумма $\varphi_k + \varphi_l$ будет вещественным числом. Отсюда ясно, что сумма

$$S(x) = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}$$

будет вещественной непрерывной функцией от x при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. При $x=-1$ мы нашли $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$, так что $S(-1)=n\pi$. Точно так же при $x=1$ имеем $\cos\varphi_k=1$, $\sin\varphi_k=0$, откуда $\varphi_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ и $S(1)=0$. Функция $S(x)$ как непрерывная, при изменении x от -1 до 1, принимает все значения между $n\pi$ и 0 и, в частности, значения

$$n\pi,\ (n-1)\pi,\ (n-2)\pi,\ \ldots,\ \pi,\ 0. \tag{E}$$

Из непрерывности функции $S(x)$ вытекает, что она не может принять какого-либо значения из ряда (E), не приняв всех предшествующих при меньших значениях переменного. Отсюда следует, что в интервале $[-1, 1]$ можно найти $n+1$ возрастающих значений x: $x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}$, при которых

$$S(x_1)=n\pi,\ S(x_2)=(n-1)\pi,\ \ldots,$$
$$S(x_n)=\pi,\ S(x_{n+1})=0.$$

Это замечание оказывается весьма важным для дальнейшего. Докажем теперь, что

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{2n})=\frac{u}{\sqrt{\psi(x)}},$$

где u — некоторая целая функция n-й степени. Для этого воспользуемся известной формулой

$$\cos(\varphi_1+\ldots+\varphi_{2n})+i\sin(\varphi_1+\ldots+\varphi_{2n})=$$
$$=\prod_{k=1}^{2n}(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k),$$

которая даёт, если подставить на место $\cos\varphi_k$ и $\sin\varphi_k$ их выражения (B):

$$\cos S(x)+i\sin S(x)=$$
$$=\prod_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{1+x}+i\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+a_kx}}. \tag{F}$$

В знаменателе мы имеем:

$$\prod_{k=1}^{2n} \sqrt{1+a_k x} = \sqrt{\psi(x)}. \tag{G}$$

Рассмотрим теперь подробнее произведение

$$P = \prod_{k=1}^{2n} \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{1+x} + i \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{1-x} \right).$$

Выполняя указанные здесь умножения, видим, что P представляется в виде суммы

$$P = \sum_{\lambda+\mu=2n} A_{\lambda,\mu} (\sqrt{1+x})^{\lambda} (i\sqrt{1-x})^{\mu}, \tag{H}$$

где $A_{\lambda,\mu}$ — числа вещественные, и суммирование распространяется на все положительные целые числа λ и μ, связанные равенством $\lambda+\mu=2n$, которое показывает, что λ и μ всегда одной чётности.

Все члены суммы (H) разобьём на две группы: к первой отнесём те члены, в которых λ, μ — чётные, а ко второй те, в которых λ, μ — нечётные. Члены первой группы дают в сумме вещественный полином степени не выше n-й, который обозначим через $u(x)$, члены второй группы дают сумму вида $i\sqrt{1-x^2}\, v(x)$, где $v(x)$ — вещественный полином степени не выше $(n-1)$-й. Таким образом,

$$P = u(x) + i\sqrt{1-x^2}\, v(x).$$

Принимая во внимание этот результат и равенства (F) и (G), находим

$$\cos S(x) + i \sin S(x) = \frac{u(x) + i\sqrt{1-x^2}\, v(x)}{\sqrt{\psi(x)}},$$

откуда через отделение вещественных и мнимых частей получим:

$$\cos S(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{\psi(x)}}. \tag{J}$$

Составим частное $\frac{u(x)}{x^n}$ и найдём предел, к которому оно стремится, когда x возрастает беспредельно. Имеем

$$\frac{u(x)}{x^n}=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{2n}\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}+i\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{2n}\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}-i\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right),$$

где под $\sqrt{1-x}$ при $x>1$ будем понимать число $i\sqrt{x-1}$; отсюда легко находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{x^n}=\frac{1}{2}\prod_{l=1}^{2n}\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}+\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{2n}\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}-\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\right).$$

Положив это число равным $\frac{1}{H}$, мы приходим к заключению, что

$$H\cos S(x)=f(x)=\frac{y}{\sqrt{\psi(x)}},\tag{K}$$

где y — целая функция вида

$$y=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n.$$

Найденная таким образом функция (K) вида (1) n° 7 будет наименее уклоняющейся от нуля. В самом деле, выше было замечено, что в интервале $[-1,1]$ можно найти $n+1$ значений x: $x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}$, при которых

$$S(x_1)=n\pi,\quad S(x_2)=(n-1)\pi,\quad\ldots,\quad S(x_{n+1})=0.$$

Но при тех же значениях x функция $f(x)$, как показывает равенство (K), достигает наибольшего в интервале $[-1,1]$ числового значения $L=|H|$. Число перемен знака в ряду

$$f(x_1)=(-1)^nH,\quad f(x_2)=(-1)^{n-1}H,\quad\ldots,$$
$$f(x_{n+1})=(-1)^0H$$

будет n, откуда следует, что функция (K), действительно, наименее уклоняется от нуля. Её уклонение L определяется равенством

$$L=\frac{2^{n+1}}{\left|\prod_{k=1}^{2n}(\sqrt{1+a_k}+\sqrt{1-a_k})+\prod_{k=1}^{2n}(\sqrt{1+a_k}-\sqrt{1-a_k})\right|}$$

Замечание I. Задача, которую мы решили, представляет обобщение второго примера, рассматриваемого Чебышевым в мемуаре «Sur les questions des minima». Чебышев решает следующую задачу: между всеми функциями вида

$$f(x)=\frac{x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n}{\varphi(x)},$$

где $\varphi(x)$ — данная целая функция степени $\leqslant n$ — не обращается в нуль в интервале $[-1,1]$, найти ту, которая наименее уклоняется от нуля. Очевидно, достаточно будет положить $\psi(x)=[\varphi(x)]^2$, чтобы свести задачу Чебышева к только что решённой.

Замечание II. Если положить $\psi(x)=1$, то мы получим задачу, уже решённую в n° 5.

9. Результаты, полученные в предыдущем n°, позволяют без труда решить такую задачу: между всеми функциями вида

$$f(x)=\frac{p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n}{\sqrt{\psi(x)}}, \tag{A}$$

которые при данном вещественном значении $x=\xi$, лежащем вне интервала $[-1,1]$ (так что $|\xi|>1$), принимают данное значение h, найти ту, которая наименее уклоняется от нуля в интервале $[-1,1]$. Здесь через $\psi(x)$ обозначена данная целая функция, удовлетворяющая поставленным в n° 7 условиям. Для решения задачи обратимся к равенству (J) n° 8

$$\cos S(x)=\frac{u(x)}{\sqrt{\psi(x)}}$$

и умножим обе части этого равенства на некоторый множитель M. Этот множитель подберём так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{M u(\xi)}{\sqrt{\psi(\xi)}} = h,$$

что сделать всегда возможно, так как все n корней функции $u(x)$ лежат в интервале $[-1,1]$ и, следовательно, $u(\xi) \neq 0$. Функция

$$f(x) = \frac{M u(x)}{\sqrt{\psi(x)}} = M \cos S(x) \tag{B}$$

будет искомая. Наибольшее числовое значение этой функции в интервале $[-1,1]$, очевидно, будет равно $|M|$. По доказанному в n° 8 можно найти $n+1$ таких значений x: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, лежащих в интервале $[-1,1]$, что

$$f(x_1) = (-1)^n M,\ f(x_2) = (-1)^{n-1} M,\ \ldots,$$
$$f(x_n) = (-1)^1 M,\ f(x_{n+1}) = (-1)^0 M. \tag{C}$$

Здесь каждые два смежных числа имеют противоположные знаки. Это замечание позволяет доказать, что не существует функции $f_1(x)$ вида (A), удовлетворяющей условию

$$f_1(\xi) = h,$$

которая бы уклонялась от нуля менее, чем $f(x)$. Действительно, разность $f(x) - f_1(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) - f_1(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{\psi(x)}},$$

где $\lambda(x)$ — целая функция степени не выше n-й, не равная нулю тождественно и приводящаяся к нулю при $x = \xi$. Из сделанного предположения вытекает, что в ряду

$$\lambda(x_1),\ \lambda(x_2),\ \ldots,\ \lambda(x_n),\ \lambda(x_{n+1})$$

имеется n перемен знака, а значит $\lambda(x)$ имеет n нулей в интервале $[-1,1]$. Но это невозможно, если $\lambda(x)$ не приводится к нулю тождественно, так как $\lambda(x)$ имеет ещё нуль в точке ξ. Таким образом, функция (B) будет действительно наименее уклоняющейся от нуля.

В виде примера решим задачу, рассматриваемую Чебышевым в статье «О функциях, мало уклоняющихся от нуля при некоторых величинах переменной».

Положим, что дана функция вида

$$F(\varphi) = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + \\ + B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots + B_n \sin n\varphi \qquad \text{(D)}$$

и два числа φ_0 и φ_1, удовлетворяющих условию $0 < \varphi_0 < \varphi_1 < \pi$; требуется подобрать числа $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ так, чтобы при $\varphi = \varphi_1$ функция $F(\varphi)$ принимала данное значение h и в интервале $[-\varphi_0, \varphi_0]$ наименее уклонялась от нуля. Вместо φ введём новое переменное x, связанное с φ равенством

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = x \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_0, \qquad \text{(E)}$$

из которого легко видеть, что при изменении φ от $-\varphi_0$ до φ_0 переменная x изменяется, возрастая от -1 до 1; при $\varphi = \varphi_1$ для x получается значение

$$x_1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_0} > 1.$$

Равенства

$$\cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - x^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}}{1 + x^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}}, \qquad (\text{F}_1)$$

$$\sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2x \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}{1 + x^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}} \qquad (\text{F}_2)$$

показывают, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ выражаются рационально через x. С другой стороны, $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ определяются по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ для всякого целого положительного k равенствами

$$\cos k\varphi = \cos^k\varphi - \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cos^{k-2}\varphi\sin^2\varphi + \ldots,$$

$$\sin k\varphi = k\cos^{k-1}\varphi\sin\varphi - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{k-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots$$

Принимая это во внимание, заключаем, что функция $F(\varphi)$, выраженная через x, имеет вид

$$F(\varphi) = f(x) = \frac{P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \ldots + P_{2n} x^{2n}}{\left(1 + x^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2}\right)^n}. \qquad \text{(G)}$$

Обратно, если в функцию такого вида подставим вместо x его выражение через φ, то получим функцию вида (D).

Первоначально поставленная задача поэтому эквивалентна следующей: найти функцию вида (G), принимающую при $x = x_1 > 1$ данное значение h и наименее уклоняющуюся от нуля в интервале $[-1, 1]$. Для решения этой задачи, согласно изложенному выше, замечаем прежде всего, что в рассматриваемом случае функция $\psi(x)$ будет

$$\psi(x) = \left(1 + x^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}.$$

Функция $\psi(x)$ разлагается на произведение $4n$ линейных множителей, из которых одна половина будет вида

$$1 + ix \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2},$$

а другая — вида

$$1 - ix \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}.$$

Поэтому для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{4n}$ находятся такие значения:

$$\left.\begin{aligned} a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n} = i \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}, \\ a_{2n+1} = a_{2n+2} = \ldots = a_{4n} = -i \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Функция $u(x)$ получается из равенства

$$u(x)=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{4n}\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{1+x}+i\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{1-x}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{4n}\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{1+x}-i\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{1-x}\right),$$

которое при значениях $a_1, a_2, \ldots, a_{4n}$, определённых равенствами (I), после перемножений даёт:

$$u(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}}{2\left(\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}}.$$

Поэтому функция

$$\cos S(x)=\frac{u(x)}{\sqrt{\psi(x)}}$$

будет в рассматриваемом случае:

$$\cos S(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}}{2\left(\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}\left(1+x^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}\right)^{n}}$$

или

$$\cos S(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}}{2\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+x^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)^{n}}.$$

Остаётся ещё определить число M из условия

$$M\cos S(x_1)=h,$$

и тогда функция

$$f(x)=\frac{1}{2}M\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}}{\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+x^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)^{n}}$$

будет искомая. Подставляя сюда на место x его выражение

$$x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}},$$

получим после небольших приведений:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} M \left\{ \left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} + \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} - 1} \right)^{2n} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} - \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} - 1} \right)^{2n} \right\}. \qquad (K)$$

Полагая здесь $\varphi = \varphi_1$, получаем уравнение для определения M

$$M \left\{ \left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} + \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} - 1} \right)^{2n} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} - \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} - 1} \right)^{2n} \right\} = 2h.$$

Функция $F(\varphi)$, как видно из равенства (K), будет целой функцией от $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ степени n; поэтому после приведения её к виду (D) она будет содержать только $\cos\varphi, \ldots, \cos n\varphi$, членов же с $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi, \ldots$ не будет.

10. Обратимся к рассмотрению задачи, которая в простейшей форме была впервые поставлена Менделеевым в сочинении «Исследование водных растворов по удельному весу (1887)».

Положим, что дано положительное число Δ и некоторый конечный интервал $[a, b]$. Будем рассматривать все те многочлены второй степени $p_0+p_1x+p_2x^2$, уклонение которых от нуля в интервале $[a, b]$ не превосходит Δ, так что

$$-\Delta \leqslant p_0+p_1x+p_2x^2 \leqslant \Delta \quad (-a \leqslant x \leqslant b);$$

требуется найти точный верхний предел числового значения одного из коэффициентов p_0, p_1, p_2. Здесь слово «точный» нужно понимать в том смысле, что этот предел на самом деле достигается для одной из функций, удовлетворяющих поставленным условиям. Такова постановка задачи у самого Менделеева.

В моём мемуаре «Об одном вопросе Менделеева (1889)»*) дано решение более общей задачи: найти точный верхний предел для числового значения одного из коэффициентов p_0, p_1, ..., p_n многочлена

$$p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_nx^n,$$

если известно, что уклонение этого многочлена от нуля в интервале $[a, b]$ не превосходит заданного числа Δ. В том же сочинении решаются ещё следующие задачи: по данному Δ найти точный верхний предел величины

$$|p_0+p_1c+\ldots+p_nc^n| \text{ или } |p_1+2p_2c+\ldots+np_nc^{n-1}|,$$

где c — число данное.

Вопрос Менделеева ещё более обобщается в сочинении В. А. Маркова «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля (1892)». В. А. Марков решает такую задачу: найти точный верхний предел числового значения линейной функции

$$\alpha_0p_0+\alpha_1p_1+\ldots+\alpha_np_n,$$

где α_0, α_1, ..., α_n — данные числа, от коэффициентов целой функции

$$p_0+p_1x+\ldots+p_nx^n,$$

относительно которой только известно, что её уклонение от нуля в интервале $[a, b]$ не превосходит данного числа Δ.

*) Этот мемуар включён в настоящий сборник. (*Прим. ред.*)

Мы покажем сейчас, что решение этой задачи тесно связано с разысканием некоторой функции под условием, чтобы её уклонение от нуля в интервале $[a, b]$ было наименьшим. Положим, в самом деле, что мы умеем найти функцию вида

$$f(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n,$$

между параметрами которой имеется линейная (неоднородная) зависимость

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = \alpha,$$

где $\alpha > 0$ — произвольно заданное число, наименее уклоняющуюся от нуля в интервале $[a, b]$. Если её уклонение от нуля есть L, то искомый точный верхний предел G для

$$|\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n|$$

будет:

$$G = \frac{\Delta}{L}\alpha. \tag{A}$$

Заметим прежде всего, что предел $\frac{\Delta}{L}\alpha$ достигается, очевидно, для функции

$$\psi(x) = \frac{\Delta}{L} f(x),$$

которая при $a \leqslant x \leqslant b$ удовлетворяет неравенству

$$-\Delta \leqslant \psi(x) \leqslant \Delta.$$

Положим теперь, что

$$G > \frac{\Delta}{L}\alpha,$$

так что при некоторых значениях $p_0 = p_0'$, $p_1 = p_1'$, ..., $p_n = p_n'$

$$|\alpha_0 p_0' + \alpha_1 p_1' + \ldots + \alpha_n p_n'| = G$$

и в то же время

$$|f_1(x)| = |p_0' + p_1' x + \ldots + p_n' x^n| \leqslant \Delta$$

при $a \leqslant x \leqslant b$. Составив целую функцию n-й степени

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{G} f_1(x),$$

замечаем, что коэффициенты её

$$P_0 = \frac{\alpha}{G} p_0', \ P_1 = \frac{\alpha}{G} p_1', \ \ldots, \ P_n = \frac{\alpha}{G} p_n'$$

связаны соотношением

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \alpha.$$

Уклонение же функции $\varphi(x)$ от нуля в интервале $[a, b]$ будет $< L$, как показывает неравенство

$$|\varphi(x)| = \frac{\alpha}{G} |f_1(x)| \leqslant \frac{\alpha}{G} \Delta < L,$$

которое имеет место для $a \leqslant x \leqslant b$. Получается, таким образом, противоречие с предположением, что $f(x)$ — наименее уклоняющаяся от нуля функция, коэффициенты которой связаны соотношением $\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = \alpha$, откуда видно, что точный верхний предел величины $|\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n|$ действительно определяется равенством (A).

11. Всё, таким образом, сводится к разысканию функции вида

$$f(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n, \tag{A}$$

наименее уклоняющейся от нуля в интервале $[a, b]$, если между параметрами $p_0, p_1, \ldots, p_n$ имеется соотношение

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = \alpha \quad (\alpha \neq 0). \tag{B}$$

Вместе с В. А. Марковым введём одно сокращённое обозначение; линейную функцию

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n$$

от коэффициентов целой функции

$$F(x) = P_0 + P_1 x + \ldots + P_n x^n$$

будем обозначать символом $\omega(F)$:

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \omega(F). \tag{C}$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ будут все различные значения x в интервале $[a, b]$, при которых функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $\omega(f)=\alpha$, достигает наибольшего числового значения L, так что

$$|f(x_1)|=|f(x_2)|=\ldots=|f(x_\mu)|=L. \qquad \text{(D)}$$

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы при наличии равенства $\omega(f)=\alpha$ функция $f(x)$ наименее уклонялась от нуля, даются следующей теоремой: *если $f(x)$ наименее уклоняется от нуля, то нельзя найти такой целой функции*

$$g(x)=q_0+q_1x+\ldots+q_nx^n,$$

удовлетворяющей условию

$$\omega(g)=0, \qquad \text{(E)}$$

чтобы числа

$$f(x_1)g(x_1),\ f(x_2)g(x_2),\ \ldots,\ f(x_\mu)g(x_\mu) \qquad \text{(F)}$$

были отрицательными; обратно, если нет такой функции $g(x)$, то $f(x)$ наименее уклоняется от нуля в интервале $[a, b]$.

Если функция $g(x)$ существует, то приличным подбором положительного числа ε можно достигнуть того, чтобы уклонение от нуля функции

$$f_1(x)=f(x)+\varepsilon g(x),$$

удовлетворяющей условию

$$\omega(f_1)=\alpha,$$

было меньше L.

Действительно, выделим около каждого из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ промежутки

$$(x_1-\lambda,\ x_1+\lambda),\quad (x_2-\lambda,\ x_2+\lambda),\quad \ldots,$$
$$(x_\mu-\lambda,\ x_\mu+\lambda) \qquad \text{(G)}$$

и возьмём λ столь малым, чтобы в каждом из них произведение

$$f(x)g(x)$$

оставалось отрицательным, не обращаясь в нуль. Затем обозначим через G верхний предел величины $|g(x)|$ в интервале $[a, b]$, а через L_0 — верхний предел величины $|f(x)|$ для всех значений x, лежащих в интервале $[a, b]$, но вне интервалов (G). Очевидно, что $L_0 < L$.

Определим положительное число ε из условия

$$\varepsilon < \frac{L - L_0}{G}.$$

Тогда для всех x, лежащих в интервале $[a, b]$, но вне интервалов (G),

$$|f_1(x)| = |f(x) + \varepsilon g(x)| \leqslant L_0 + \varepsilon G < L.$$

Взяв же какой-нибудь интервал $(x_i - \lambda, x_i + \lambda)$, замечаем, что в нём числа $f(x)$ и $g(x)$ разных знаков (и ни одно из них не нуль); на этом основании

$$|f_1(x)| = ||f(x)| - \varepsilon |g(x)|| < L,$$

так как

$$0 < |f(x)| < L, \quad 0 < \varepsilon |g(x)| \leqslant \varepsilon G < L.$$

Первая часть теоремы доказана.

Приступая к доказательству второй части, предположим, что нет функции $g(x)$, удовлетворяющей условию $\omega(g) = 0$, для которой все числа (F) отрицательны. Тогда, взяв какую-нибудь целую функцию

$$F(x) = P_0 + P_1 x + \ldots + P_n x^n,$$

удовлетворяющую условию

$$\omega(F) = \alpha,$$

составим функцию

$$g(x) = F(x) - f(x),$$

для которой, очевидно, выполняется равенство

$$\omega(g) = 0.$$

В силу предположения, по крайней мере одно из чисел (F), например, $f(x_i)g(x_i)$ будет $\geqslant 0$, следовательно, $|F(x_i)|$, равное $|f(x_i)+g(x_i)|$, будет $\geqslant|f(x_i)|=L$, так что уклонение $F(x)$ будет не менее L; а это доказывает вторую часть высказанной теоремы.

12. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция

$$f(x)=p_0+p_1x+\ldots+p_nx^n$$

при выполнении условия $\omega(f)=a$ наименее уклонялась от нуля в интервале $[a, b]$, могут быть высказаны в другой форме, более удобной для приложений. Предположим, что

$$x_1<x_2<\ldots<x_\mu$$

будут все различные значения x, лежащие в интервале $[a, b]$, для которых $f(x)$ достигает наибольшего числового значения L. Предполагая, что $f(x)$ не приводится к константе, замечаем прежде всего, что $\mu\leqslant n+1$, так как каждый корень уравнения

$$[f(x)]^2-L^2=0,$$

лежащий в интервале $[a, b]$ и отличный от a и b, должен быть чётной кратности.

Обозначим через $\Phi(x)$ целую функцию

$$\Phi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\mu) \tag{a}$$

и положим

$$\Phi_i(x)=\frac{\Phi(x)}{x-x_i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu). \tag{b}$$

Эти функции $\Phi_i(x)$ будут целыми функциями степени $\mu-1$. Знак числа $\Phi_i(x_i)$ будет одинаков со знаком $(-1)^{\mu-i}$; это вытекает из равенства

$$\Phi_i(x)=(-1)^{\mu-i}\prod_{m=1}^{i-1}(x_i-x_m)\prod_{m=i+1}^{\mu}(x_m-x_i),$$

так как числа $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ идут, возрастая. После этих предварительных замечаний мы можем высказать теорему, которая является основной для всех дальнейших рассуждений.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношению $\omega(f)=a$, наименее уклонялась от нуля в интервале $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1) *При $\mu \leqslant n$ равенство*

$$\omega(\Phi\psi)=0 \tag{c}$$

должно выполняться для всякой целой функции $\psi(x)$ степени не выше $n-\mu$.

2) *В ряду*

$$(-1)^1\omega(\Phi_1)f(x_1),\quad (-1)^2\omega(\Phi_2)f(x_2),\ \ldots,\quad (-1)^\mu\omega(\Phi_\mu)f(x_\mu) \tag{d}$$

не должно быть чисел разных знаков.

Докажем прежде всего, что при $\mu \leqslant n$ для функции, наименее уклоняющейся от нуля, условие 1) должно быть выполнено. В самом деле, какова бы ни была целая функция $g(x)$ степени не выше n-й, по известной формуле Лагранжа,

$$g(x)=C\Phi(x)R(x)+\sum_{i=1}^{\mu}\frac{g(x_i)\Phi_i(x)}{\Phi_i(x_i)}, \tag{e}$$

где C — постоянная, а $R(x)$ — некоторая целая функция степени не выше $n-\mu$, если $\mu \leqslant n$; если же $\mu=n+1$, то $R(x)=0$. Из (e) выводим:

$$\omega(g)=C\omega(\Phi R)+\sum_{i=1}^{\mu}\frac{g(x_i)}{\Phi_i(x_i)}\omega(\Phi_i). \tag{f}$$

Если при $\mu \leqslant n$ условие 1) не выполняется, то можно подобрать функцию $R(x)$ так, чтобы $\omega(\Phi R)\neq 0$. Затем, назначив для $g(x_1), \ldots, g(x_\mu)$ такие значения, чтобы выполнялись неравенства

$$g(x_1)f(x_1)<0,\quad g(x_2)f(x_2)<0,\ \ldots,\quad g(x_\mu)f(x_\mu)<0,$$

можно надлежащим выбором числа C удовлетворить условие $\omega(g)=0$. Принимая во внимание теорему n°11, заключаем отсюда, что условие 1) необходимо выполняется при $\mu \leqslant n$ для функции $f(x)$, наименее уклоняющейся от нуля.

Предполагая, что условие 1) выполнено при $\mu \leqslant n$, мы можем равенство (f) переписать так:

$$\omega(g) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(x_i)}{\Phi_i(x_i)} \omega(\Phi_i). \tag{f$_1$}$$

Это равенство имеет место и при $\mu = n + 1$. Для чисел $g(x_1), \ldots, g(x_\mu)$, которые до сих пор оставались произвольными, будем искать такие значения, чтобы удовлетворялось равенство

$$\omega(g) = 0,$$

равносильное, очевидно, следующему:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \frac{(-1)^{\mu} g(x_i)}{\Phi_i(x_i)} \omega(\Phi_i) = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{\mu} \frac{(-1)^{\mu} f(x_i) \omega(\Phi_i)}{f(x_i) \Phi_i(x_i)} g(x_i) = 0. \tag{g}$$

Числа $\omega(\Phi_1), \omega(\Phi_2), \ldots, \omega(\Phi_\mu)$ не могут быть равны нулю одновременно, так как иначе для всякой функции $g(x)$ степени не выше n-й выполнялось бы равенство $\omega(g) = 0$ и, следовательно, в выражении

$$\omega(F) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n$$

все числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ были бы равны нулю, что невозможно. Положим теперь, что условие 2) выполнено; тогда, заметив, что знак числа $\Phi_i(x_i)$ одинаков со знаком числа $(-1)^{\mu-i}$, заключаем, что среди чисел

$$\frac{(-1)^{\mu} f(x_1) \omega(\Phi_1)}{\Phi_1(x_1)}, \frac{(-1)^{\mu} f(x_2) \omega(\Phi_2)}{\Phi_2(x_2)}, \ldots$$

$$\ldots, \frac{(-1)^{\mu} f(x_\mu) \omega(\Phi_\mu)}{\Phi_\mu(x_\mu)} \tag{h}$$

нет чисел разных знаков; кроме того одно, по крайней мере, из этих чисел не равно нулю. Отсюда следует, что равенству (g) нельзя удовлетворить такими числами $g(x_1)$, $g(x_2)$, ..., $g(x_\mu)$, чтобы все произведения $f(x_1)g(x_1)$, ..., $f(x_\mu)g(x_\mu)$ были отрицательными. Поэтому, на основании теоремы n°11, функция $f(x)$ будет наименее уклоняющейся от нуля при выполнении условия $\omega(f)=\alpha$. Положим, наконец, что условие 1) выполнено, а условие 2) не выполнено. Тогда среди чисел (h) будут числа разных знаков, а потому можно будет найти числа $g(x_1)$, $g(x_2)$, ..., $g(x_\mu)$, удовлетворяющие уравнению (g) одновременно с неравенствами

$$f(x_1)g(x_1)<0,\ f(x_2)g(x_2)<0,\ \ldots,\ f(x_\mu)g(x_\mu)<0.$$

В самом деле, если дан ряд чисел, не равных нулю:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m,$$

среди которых числа A_1, A_2, ..., A_k положительные, а числа A_{k+1}, ..., A_m отрицательные, то можно всегда найти положительные числа ξ_1, ξ_2, ..., ξ_m, удовлетворяющие уравнению

$$A_1\xi_1+A_2\xi_2+\ldots+A_k\xi_k=-(A_{k+1}\xi_{k+1}+\ldots+A_m\xi_m). \quad \text{(i)}$$

Так как в ряду (h) есть числа разных знаков, то сделанное сейчас замечание непосредственно применяется к уравнению (g) и обнаруживает справедливость заключения, что при невыполнении условия 2) можно найти функцию $g(x)$, удовлетворяющую условию $\omega(g)=0$ одновременно с неравенствами $f(x_i)g(x_i)<0$ $(i=1, 2, \ldots, \mu)$. А отсюда, по теореме n°11, следует заключить, что функция $f(x)$ не будет наименее уклоняющейся от нуля. Теорема может считаться вполне доказанной.

Замечание. Если условие

$$\omega(\Phi\psi)=0 \quad \text{(c)}$$

удовлетворяется для всякой целой функции $\psi(x)$ степени не выше $n-\mu$, то имеют место равенства

$$\omega(\Phi)=0,\quad \omega(x\Phi)=0,\ \ldots,\ \omega(x^{n-\mu}\Phi)=0. \quad \text{(k)}$$

Обратно, если эти равенства выполняются, то и равенство (с) выполняется для всякой целой функции $\psi(x)$ степени не выше $n-\mu$. Поэтому условие 1) вполне равносильно ряду равенств (k).

13. Как уже было замечено выше (n° 1), Понселе (Poncelet) впервые встретился с задачами, которые приводят к разысканию определённого вида функций под условием их наименьшего уклонения от нуля. Простейшую из таких задач, решение которой получается в весьма изящной форме, мы намерены сейчас рассмотреть.

Задача. *Требуется представить $\sqrt{x^2+y^2}$ приближённо в виде линейной функции $ax+by$ так, чтобы относительная погрешность заключалась в возможно тесных пределах, когда переменные принимают все значения, для которых отношение $\frac{x}{y}$ лежит в заданном интервале* $[\lambda, \mu]$.

Абсолютная погрешность в приближённом представлении $\sqrt{x^2+y^2}$ в виде линейной функции $ax+by$ есть

$$ax+by-\sqrt{x^2+y^2},$$

относительная же погрешность определяется как отношение абсолютной к $\sqrt{x^2+y^2}$. Поэтому относительная погрешность представляется в виде

$$\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}-1.$$

Полагая для сокращения $\frac{x}{y}=z$, видим, что задача приводится к разысканию функции вида

$$f(z)=\frac{az+b}{\sqrt{z^2+1}}-1, \tag{1}$$

наименее уклоняющейся от нуля в заданном интервале $[\lambda, \mu]$. Так как производная

$$f'(z)=\frac{a-bz}{(z^2+1)^{3/2}}$$

не обращается в нуль более, чем при одном значении z, то, очевидно, функция $f(z)$ не может в интервале $[\lambda, \mu]$ достигать наибольшего числового значения более трёх раз.

Если эта функция достигает наибольшего числового значения при трёх значениях z: λ, z_1, μ, и притом так, что в ряду

$$f(\lambda),\ f(z_1),\ f(\mu)$$

имеются две перемены знака, то эта функция будет наименее уклоняться от нуля.

В самом деле, возьмём какую-нибудь другую функцию того же вида:

$$f_1(z)=\frac{a_1 z+b_1}{\sqrt{z^2+1}}-1$$

и составим разность

$$\psi(z)=f(z)-f_1(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\sqrt{z^2+1}}\quad (\alpha=a-a_1,\ \beta=b-b_1).$$

Если $f_1(z)$ уклоняется от нуля менее чем $f(z)$, то мы имеем в ряду чисел

$$\psi(\lambda),\ \psi(z_1),\ \psi(\mu),$$

или, что то же самое, в ряду чисел

$$\alpha\lambda+\beta,\ \alpha z_1+\beta,\ \alpha\mu+\beta$$

две перемены знака, что невозможно.

Параметры a и b для функции $f(z)$, наименее уклоняющейся от нуля, следует искать из условий

$$f(\lambda)=f(\mu), \tag{2}$$

$$f(\lambda)=-f(z_1). \tag{3}$$

Равенство (2) даёт нам отношение h параметров a и b:

$$h=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{\mu^2+1}-\sqrt{\lambda^2+1}}{\mu\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda\sqrt{\mu^2+1}} \tag{4}$$

С другой стороны, мы имеем

$$z_1 = h$$

и, следовательно,

$$f(z_1) = \frac{b\lambda^2 + b}{\sqrt{h^2+1}} - 1 = b\sqrt{h^2+1} - 1.$$

Принимая это во внимание, получаем из равенства (3) уравнение для определения b

$$\frac{b(\lambda h + 1)}{\sqrt{\lambda^2+1}} - 1 = 1 - b\sqrt{h^2+1},$$

откуда находим

$$b = \frac{2}{\frac{\lambda h + 1}{\sqrt{\lambda^2+1}} + \sqrt{h^2+1}} \tag{5}$$

и далее

$$a = \frac{2h}{\frac{\lambda h + 1}{\sqrt{\lambda^2+1}} + \sqrt{h^2+1}}. \tag{6}$$

Задача может считаться решённой, так как параметры a и b выражены в функции известных количеств. Но полученные довольно сложные выражения могут быть необыкновенно упрощены путём введения некоторых вспомогательных углов. Положим

$$\lambda = \operatorname{tg}\varphi, \quad \mu = \operatorname{tg}\psi;$$

тогда

$$\sqrt{\lambda^2+1} = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \sqrt{\mu^2+1} = \frac{1}{\cos\psi}$$

и соответственно этому

$$h = \frac{\cos\varphi - \cos\psi}{\sin\psi - \sin\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}. \tag{4*}$$

Подставляя это значение в равенство (5), находим:

$$b = \frac{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\varphi + \cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\varphi + 1} = \frac{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2}}. \tag{5*}$$

Наконец, воспользовавшись равенством (5*), из (6) найдём:

$$a = \frac{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2}}. \tag{6*}$$

Для определения уклонения L функции $f(z)$ от нуля достаточно заметить, что $L = |b\sqrt{h^2+1} - 1|$; подставляя сюда вместо b и h их выражения (4*) и (5*), находим:

$$L = \left| \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi-\psi}{4}} - 1 \right| = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi-\psi}{4}. \tag{7}$$

Задача, таким образом, решается весьма простыми равенствами (5*), (6*), (7).

Для примера положим $\lambda = 0$, $\mu = \infty$; тогда $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ и

$$a = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 2(\sqrt{2} - 1), \quad b = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 2(\sqrt{2} - 1),$$

$$L = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, функция

$$f(z) = \frac{2(\sqrt{2} - 1)(z+1)}{\sqrt{z^2+1}} - 1$$

наименее уклоняется от нуля в промежутке $(0, \infty)$.

12. ЛЕКЦИИ О НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЯХ

I. Общие основания

1. Непрерывной дробью называется выражение вида

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}. \tag{1}$$

Наряду с (1) часто рассматривают последовательность непрерывных дробей

$$\frac{a_1}{b_1};\quad \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}};\quad \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}}}\quad \text{и т. д.,} \tag{2}$$

которые называют подходящими дробями для дроби (1).

Вместо конечной последовательности дробей (2) можно взять бесконечную последовательность. Ей мы сопоставляем бесконечную непрерывную дробь. Для бесконечных непрерывных дробей естественным образом вводятся понятия о сходимости и расходимости.

2. Нетрудно получить выражение всякой из подходящих дробей (2) в виде обыкновенной дроби и вывести закон составления числителя и знаменателя.

Вторая из дробей равна

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}.$$

Третья есть

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}} = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{(b_1 b_2 + a_2)\, b_3 + b_1 a_3}.$$

Если за числители P_1, P_2, P_3 последовательных дробей принять выражения

$$a_1;\ a_1 b_2;\ a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3,$$

а за знаменатели Q_1, Q_2, Q_3 — выражения

$$b_1;\ b_1 b_2 + a_2;\ (b_1 b_2 + a_2)\, b_3 + b_1 a_3,$$

то на третьей дроби мы подмечаем, что

$$P_3 = b_3 P_2 + a_3 P_1; \quad Q_2 = b_3 Q_2 + a_3 Q_1.$$

Покажем, что имеет место общий закон

$$P_k = b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}; \quad Q_k = b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}.$$

Для этого предположим, что этот закон оправдывается для n-й дроби, т. е. что

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}; \quad Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \tag{3}$$

и докажем, что он будет справедлив и для $(n+1)$-й дроби

Для перехода от n-й дроби к $(n+1)$-й знаменатель b_n следует заменить выражением $b_n+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$; тогда

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}\left(b_n+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)+a_nP_{n-2}}{Q_{n-1}\left(b_n+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)+a_nQ_{n-2}}=$$

$$=\frac{b_{n+1}(P_{n-1}b_n+a_nP_{n-2})+a_{n+1}P_{n-1}}{b_{n+1}(Q_{n-1}b_n+a_nQ_{n-2})+a_{n+1}Q_{n-1}}=$$

$$=\frac{b_{n+1}P_n+a_{n+1}P_{n-1}}{b_{n+1}Q_n+a_{n+1}Q_{n-1}},$$

и если за числитель и знаменатель $(n+1)$-й дроби мы возьмём полученные именно выражения (а не выражения, отличающиеся от них некоторым множителем), то наш закон оказывается справедливым для $(n+1)$-й дроби.

3. Возьмём разность

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Так как

$$P_{n+1}=b_{n+1}P_n+a_{n+1}P_{n-1};\quad Q_{n+1}=b_{n+1}Q_n+a_{n+1}Q_{n-1},$$

то

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=$$

$$=\frac{b_{n+1}P_nQ_n+a_{n+1}P_{n-1}Q_n-b_{n+1}Q_nP_n-a_{n+1}Q_{n-1}P_n}{Q_{n+1}Q_n}=$$

$$=-\frac{a_{n+1}(P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n)}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Заменяя P_n и Q_n по формулам (3), получим:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_{n+1}a_n(P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1})}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Продолжая так поступать и далее, найдём, наконец, что

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=(-1)^{n-1}\frac{a_{n+1}a_na_{n-1}\ldots a_3(P_2Q_1-P_1Q_2)}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Но

$$P_2Q_1-P_1Q_2=a_1b_2b_1-a_1(b_1b_2+a_2)=-a_1a_2$$

Поэтому окончательно

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=(-1)^n\frac{a_{n+1}a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}{Q_{n+1}Q_n}. \tag{4}$$

Примечание. Иногда в непрерывной дроби числители a_2, a_3 и т. д. заменяются на $-a_2$, $-a_3$ и т. д.; тогда предыдущая формула освобождается от множителя $(-1)^n$.

Из формулы (4) можно вывести другие формулы, которыми нам придётся пользоваться в дальнейшем:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{a_1}{Q_1};\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1}{Q_1}+\left(\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}\right)=\frac{a_1}{Q_1}-\frac{a_1a_2}{Q_1Q_2};$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{P_2}{Q_2}+\left(\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}\right)=\frac{a_1}{Q_1}-\frac{a_1a_2}{Q_1Q_2}+\frac{a_1a_2a_3}{Q_2Q_3}$$

и т. д.

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_1}{Q_1}-\frac{a_1a_2}{Q_1Q_2}+\frac{a_1a_2a_3}{Q_2Q_3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\ldots a_n}{Q_{n-1}Q_n}. \tag{5}$$

Если в последней формуле (5) мы соединим попарно её члены, идя с конца, то получим нижеприведённые формулы (7) и (7′), которые, однако, мы предпочитаем вывести другим путём. Именно, мы имели:

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}a_1a_2a_3\ldots a_n}{Q_nQ_{n-1}},$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(-1)^n a_1a_2a_3\ldots a_{n+1}}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Складывая, получим:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^n a_1a_2\ldots a_n(Q_{n-1}a_{n+1}-Q_{n+1})}{Q_{n-1}Q_nQ_{n+1}}.$$

А так как

$$Q_{n+1}=b_{n+1}Q_n+a_{n+1}Q_{n-1},$$

то

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2a_3\ldots a_nb_{n+1}}{Q_{n-1}Q_{n+1}}. \tag{6}$$

Пользуясь этой формулой так же, как ранее формулой (4), получим:

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{a_1 b_2}{Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3 b_4}{Q_2 Q_4} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{2k-1} b_{2k}}{Q_{2k-2} Q_{2k}}; \tag{7}$$

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = \frac{a_1}{Q_1} - \frac{a_1 a_2 b_3}{Q_1 Q_3} - \ldots - \frac{a_1 a_2 \ldots a_{2k} b_{2k+1}}{Q_{2k-1} Q_{2k+1}}. \tag{7'}$$

4. Всякую непрерывную дробь можно привести к такой, у которой все числители равны 1. Это вид, в котором обычно представляют непрерывную дробь. Для приведения непрерывной дроби к такому виду разделим числитель и знаменатель дроби на a_1, получим:

$$\cfrac{1}{\cfrac{b_1}{a_1} + \cfrac{\cfrac{a_2}{a_1}}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}.$$

Положив $\alpha_1 = \frac{b_1}{a_1}$ и продолжая подобное преобразование далее, получим

$$\cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{\cfrac{a_2 a_4}{a_1 a_3}}{b_4 + \cfrac{a_5}{b_5 + \ddots}}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{1}{\alpha_4 + \cfrac{\cfrac{a_1 a_3 a_5}{a_2 a_4}}{b_5 + \cfrac{a_6}{b_6 + \ddots}}}}}}$$

где $\alpha_1 = \frac{b_1}{a_1}$; $\alpha_2 = \frac{b_2 a_1}{a_2}$; $\alpha_3 = \frac{b_3 a_2}{a_1 a_3}$; $\alpha_4 = \frac{b_4 a_1 a_3}{a_2 a_4}$; ...

Нетрудно будет подметить после этого общий закон составления чисел α, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2k} &= \frac{b_{2k}a_1a_3\ldots a_{2k-1}}{a_2a_4\ldots a_{2k}}, \\ \alpha_{2k+1} &= \frac{b_{2k+1}a_2a_4\ldots a_{2k}}{a_1a_3\ldots a_{2k+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Остаётся только подтвердить общность этого закона. Предположим, что он справедлив для $n=2k$, и докажем его справедливость для n на единицу большего. Мы имеем, следовательно, дробь, преобразованную до звена $2k$, т. е.

$$\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_{2k}+\cfrac{a_{2k+1}\dfrac{a_1a_3\ldots a_{2k-1}}{a_2a_4\ldots a_{2k}}}{b_{2k+1}+\cfrac{a_{2k+2}}{b_{2k+2}+\ddots}}}}}}$$

где α_{2k} вычисляется по формуле (8).

Разделив числитель и знаменатель $(2k+1)$-го звена на

$$a_{2k+1}\frac{a_1a_3\ldots a_{2k-1}}{a_2a_4\ldots a_{2k}},$$

найдём требуемую формулу

$$\alpha_{2k+1}=\frac{b_{2k+1}a_2a_4\ldots a_{2k}}{a_1a_3\ldots a_{2k+1}}.$$

Аналогично поступаем при $n=2k+1$.

Указанное преобразование не изменяет дробей

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \ldots,\ \frac{P_n}{Q_n},$$

но изменяет числитель и знаменатель их, вводя некоторый множитель.

5. Дадим теперь общий признак сходимости или расходимости непрерывной дроби, у которой все a и b — числа положительные. При этом дробь будем считать приведённой к обычной форме.

Теорема Зейделя. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — числа положительные, то непрерывная дробь*

$$\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_n+\cfrac{1}{\alpha_{n+1}+\ddots}}}}}$$

сходится, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ расходится, и, наоборот, непрерывная дробь расходится, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сходится.

Для доказательства теоремы положим $\frac{P_n}{Q_n}=A_n$. В силу формулы (6)

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}-\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}=(-1)^{2k-1}\frac{\alpha_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}<0,$$

откуда видно, что

$$A_1>A_3>A_5>\ldots>A_{2k+1}>\ldots$$

Подобным образом найдём, что

$$A_2<A_4<A_6<\ldots<A_{2k}<\ldots$$

При этом из формулы (4) видно, что $A_{2k+1}>A_{2k}$, а потому $A_{2k+1}>A_2$, и аналогично $A_{2k}<A_{2k-1}$, а потому $A_{2k}<A_1$. На основании этого заключаем, что каждая из величин A_{2k}, A_{2k+1} при $k\to\infty$ имеет конечный предел; остаётся, однако, ещё не выясненным вопрос о том, будут

ли эти пределы одинаковы или нет. Всё зависит от того, стремится ли к нулю разность

$$A_{2k+1} - A_{2k},$$

когда $k \to \infty$.

Эта разность, как известно, равна $\frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}}$. Из формул

$$Q_1 = \alpha_1,$$
$$Q_2 = \alpha_1\alpha_2 + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_{2k} = \alpha_{2k}Q_{2k-1} + Q_{2k-2},$$
$$Q_{2k+1} = \alpha_{2k+1}Q_{2k} + Q_{2k-1}$$

получим:

$$Q_2 > 1; \; Q_4 = \alpha_4 Q_3 + Q_2 > 1 \text{ и вообще } Q_{2k} > 1,$$

$$Q_3 > \alpha_3 + Q_1 > Q_1; \; Q_5 > Q_1 \text{ и вообще } Q_{2k+1} > Q_1 = \alpha_1.$$

Поэтому

$$Q_{2k} > Q_{2k-2} + \alpha_1\alpha_{2k}; \quad Q_{2k+1} > \alpha_{2k+1} + Q_{2k-1}.$$

Продолжая составлять такие последовательные неравенства, найдём:

$$Q_{2k} > \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2k});$$
$$Q_{2k+1} > \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k+1}.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ расходится, то по крайней мере один из рядов

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k+1} + \ldots; \quad \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2k} + \ldots$$

должен быть расходящимся. Поэтому одна из величин Q_{2k} или Q_{2k+1} может быть сделана больше какого угодно числа, в то время как другая не может быть как угодно малой ($Q_{2k} > 1$, $Q_{2k+1} > \alpha_1$), что и доказывает первую часть теоремы.

Докажем вторую часть. Имеем:

$$Q_1 = \alpha_1 < 1 + \alpha_1,$$
$$Q_2 = \alpha_1\alpha_2 + 1 < (1+\alpha_1)(1+\alpha_2).$$

Пусть

$$Q_k < (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Тогда

$$Q_n = \alpha_n Q_{n-1} + Q_{n-2} < (1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_{n-2})\{\alpha_n(1+\alpha_{n-1})+1\} < (1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n).$$

Итак,

$$Q_n < (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

А так как при $x > 0$

$$1 + x < e^x,$$

то

$$Q_n < e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как теперь по условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, то

$$Q_n < e^C,$$

где $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Отсюда и видно, что в этом случае ни одно из чисел Q_{2k} и Q_{2k+1} не может превзойти некоторого определённого числа (e^C), и непрерывная дробь расходится.

Например, непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q^2 + \cfrac{1}{q^3 + \ldots}}}$$

сходится при $q \geqslant 1$ и расходится при $0 < q < 1$.

6. Теорема Зейделя даёт необходимое и достаточное условие сходимости непрерывной дроби. Такая полнота решения вопроса о сходимости обусловливается ограничительным требованием, что все знаменатели $a_1, a_2, a_3, \ldots$ приведённой дроби — числа положительные. Для дробей общего вида можно указать только достаточное условие сходимости.

Пусть дана бесконечная непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}}$$

Всегда можно предполагать, что $b_k > 0\,(k = 1, 2, \ldots)$, так как в противном случае, умножив числитель и знаменатель на -1, мы изменим знак знаменателя, как нам надо. Обозначим затем $a_i = \varepsilon_i c_i$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, а $c_i > 0$. Тогда можно высказать достаточное условие сходимости.

Бесконечная дробь с положительными знаменателями сходится, если для всякого i

$$b_i - c_i > 1.$$

Мы имели формулу

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_1}{Q_n} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (5)$$

Если мы теперь докажем, что сумма эта при беспредельном возрастании n стремится к некоторому конечному пределу, то тем самым и докажется сходимость дроби.

Имеем по условию

$$Q_1 = b_1 > 1 + c_1,$$

$$Q_2 = b_2 b_1 + a_2 > (1 + c_2) Q_1 - c_2 =$$

$$= Q_1 + c_2 (Q_1 - 1) > Q_1 + c_2 c_1,$$

откуда

$$Q_2 - Q_1 > c_1 c_2.$$

Нетрудно убедиться в справедливости подобного неравенства для всякого значка i. В самом деле, допустим, что

$$Q_{n-1} - Q_{n-2} > c_1 c_2 \ldots c_{n-1}.$$

Тогда по формуле

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

получаем

$$Q_n > (1 + c_n) Q_{n-1} - c_n Q_{n-2} > Q_{n-1} + c_n (Q_{n-1} - Q_{n-2}),$$

т. е.

$$Q_n - Q_{n-1} > c_n (Q_{n-1} - Q_{n-2}) > c_1 c_2 \ldots c_n.$$

Неравенства эти позволяют заключить, что

$$Q_1 > 1 + c_1,$$
$$Q_2 > 1 + c_1 + c_1 c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_n > 1 + c_1 + c_1 c_2 + c_1 c_2 c_3 + \ldots + c_1 c_2 \ldots c_n.$$

Обозначим $Q'_i = 1 + c_1 + c_1 c_2 + \ldots + c_1 c_2 \ldots c_i$ и рассмотрим сумму

$$S_n = \frac{c_1}{Q'_1} + \frac{c_1 c_2}{Q'_1 Q'_2} + \frac{c_1 c_2 c_3}{Q'_2 Q'_3} + \ldots + \frac{c_1 c_2 \ldots c_n}{Q'_{n-1} Q'_n},$$

каждый член которой больше соответствующего члена суммы (5). Если мы докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ конечен, то тем самым убедимся в существовании предела $\frac{P_n}{Q_n}$. Так как $\frac{c_1 c_2 \ldots c_i}{Q'_{i-1} Q'_i} = \frac{1}{Q'_{i-1}} - \frac{1}{Q'_i}$, в чём легко убедиться непосредственно, то

$$S_n = \frac{c_1}{Q'_1} + \left(\frac{1}{Q'_1} - \frac{1}{Q'_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{Q'_{n-1}} - \frac{1}{Q'_n}\right) =$$

$$= \frac{c_1}{Q'_1} + \frac{1}{Q'_1} - \frac{1}{Q'_n} = 1 - \frac{1}{Q'_n}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{Q_n} < 1,$$

и утверждение доказано.

Нетрудно видеть, что доказательство теоремы позволяет расширить условие, присоединив к неравенству $b_i - c_i > 1$ и знак равенства, так что непрерывная дробь с положительными знаменателями сходится, если для всякого i

$$b_i - c_i \geqslant 1.$$

7. Теорема. *Если в бесконечной непрерывной дроби все a_i и b_i — числа целые и положительные и $b_i > a_i$, то значение непрерывной дроби — число иррациональное (её сходимость вытекает из доказанного ранее).*

Допустим противное, т. е. что при указанных в теореме условиях

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

есть рациональное число $\frac{A_1}{B_1}$.

Всегда можно предполагать дробь $\frac{A_1}{B_1}$ несократимой. Развернём дробь $\frac{A_1}{B_1}$ в непрерывную дробь данного вида; тогда

$$\frac{A_1}{B_1} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{A_2}{B_2}},$$

где $\frac{A_2}{B_2}$ — несократимая дробь. Иначе говоря,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{a_1 B_2}{b_1 B_2 + A_2}.$$

Полученная дробь $\frac{a_1B_2}{b_1B_2+A_2}$ может быть сократимой; пусть λ есть общий делитель числителя и знаменателя, так что

$$\lambda A_1 = a_1 B_2,$$
$$\lambda B_1 = b_1 B_2 + A_2.$$

Но ни один из делителей λ не делит B_2, так как иначе тот же делитель в силу второго равенства имел бы A_2, между тем дробь $\frac{A_2}{B_2}$ мы предполагали несократимой. Следовательно, λ делит a_1, так что

$$A_1 = \frac{a_1}{\lambda} B_2,$$

причём $\frac{a_1}{\lambda}$ есть целое положительное число.

Отсюда следует, что $A_1 \geqslant B_2$. Подобным же образом, рассматривая дробь $\frac{A_2}{B_2}$ в связи с $\frac{A_3}{B_3}$, получим, что $A_2 \geqslant B_3$ и вообще $A_i \geqslant B_{i+1}$. Присоединив же сюда очевидные при условии $b_i > a_i$ неравенства

$$B_1 > A_1;\ B_2 > A_2;\ \ldots;\ B_i > A_i,$$

получим

$$B_1 > A_1 \geqslant B_2 > A_2 \geqslant B_3 > \ldots,$$

что невозможно, так как все B_i и A_i — числа натуральные, а бесконечная последовательность убывающих целых чисел не может состоять только из положительных чисел.

8. Предположим, что мы имеем две последовательности чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

Пользуясь ими и беря произвольное число z_1, составим дроби

$$z_1 = \frac{a_1}{b_1 + z_2},$$

$$z_2 = \frac{a_2}{b_2 + z_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z_m = \frac{a_m}{b_m + z_{m+1}}.$$

Тогда получим выражение z_1 в виде непрерывной дроби

$$z_1 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 \; \ddots \; + \cfrac{a_m}{b_m + z_{m+1}}}}$$

Весьма важно заметить, что, представляя некоторое число z_1 в виде указанной непрерывной дроби, мы получаем правильный результат только в том случае, если под последним членом z_{m+1} мы подразумеваем определённую для данного числа z_1 величину, и переход к разложению величины z_1 в бесконечную непрерывную дробь на основе полученной формулы не всегда законен.

Поясним это примером. Пусть z есть корень уравнения $z^2 - 2z - 1 = 0$. Тогда

$$z = 2 + \frac{1}{z},$$

и, значит,

$$z = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{z}}}}$$

Уравнение $z^2 - 2z - 1 = 0$ имеет два корня: один положительный, другой отрицательный. При соответствующем значении последнего члена $\frac{1}{z}$ нашей дроби она может выражать и тот и другой корень, но бесконечная дробь

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

даёт выражение только положительного корня рассматриваемого уравнения.

9. Установим теперь критерий, по которому можно было бы судить, что данное число выражается данной бесконечной непрерывной дробью с положительными членами.

Теорема. *Если данная непрерывная дробь с положительными членами сходится и если, разлагая данное число z_1 в непрерывную дробь рассматриваемого вида, мы не встретим (как бы далеко разложение ни продолжали) ни одного числа z_m, меньшего нуля, то z_1 равняется данной дроби.*

Действительно, предположим, что мы имеем некоторую сходящуюся дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cdots+\cfrac{a_n}{b_n+\cdots}}}$$

и число z_1, разлагая которое в непрерывную дробь указанного вида, получаем

$$z_1=\frac{a_1}{b_1+z_2},$$

$$z_2=\frac{a_2}{b_2+z_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n=\frac{a_n}{b_n+z_{n+1}},$$

т. е.

$$z_1 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n + z_{n+1}}}}.$$

По условию все $z_i > 0$. Далее, при изменении z_{n+1} от 0 до ∞ написанная непрерывная дробь изменяется в одном и том же направлении, либо постоянно увеличиваясь, либо уменьшаясь. Давая, следовательно, два крайних значения знаменателю z_{n+1}, а именно 0 и ∞, мы получим соответственно этому две грани, между которыми должно заключаться z_1. Отсюда видно, что z_1 всегда заключается между двумя последовательными подходящими дробями, а так как разность между ними может быть сделана меньшей наперёд заданного числа, то, следовательно, при наших условиях число z_1 действительно равняется данной сходящейся бесконечной дроби, т. е.

$$z_1 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}}}$$

II. Разложение в непрерывную дробь отношения двух гипергеометрических рядов

10. Рассмотрим вещественный гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots,$$

который сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| > 1$; при $x = 1$ ряд сходится, если $\gamma > \alpha + \beta$; при

$x = -1$ он сходится, если $\gamma + 1 > \alpha + \beta$. Мы будем предполагать, что $|x| < 1$. Изменив α на $\alpha + 1$ и γ на $\gamma + 1$, мы получим другой гипергеометрический ряд

$$F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1,\ x) = \\ = 1 + \frac{(\alpha+1)\beta}{1\cdot(\gamma+1)}x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2 + \ldots$$

и, вычитая первую сумму из второй, найдём

$$F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1,\ x) - F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) = \\ = \frac{(\gamma-\alpha)\beta}{\gamma(\gamma+1)}x\left\{1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{1\cdot(\gamma+2)}x + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot(\gamma+2)(\gamma+3)}x^2 + \ldots\right\},$$

т. е.

$$F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1,\ x) - F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) = \\ = \frac{(\gamma-\alpha)\beta}{\gamma(\gamma+1)}x\cdot F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2,\ x). \quad (1)$$

Это — первая формула, которой мы будем пользоваться в дальнейшем. Другую, подобную ей, получим, если в формуле (1) поменяем местами α и β:

$$F(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1,\ x) - F(\beta,\ \alpha,\ \gamma,\ x) = \\ = \frac{(\gamma-\beta)\alpha}{\gamma(\gamma+1)}x\cdot F(\beta+1,\ \alpha+1,\ \gamma+2,\ x).$$

Переставив два первых параметра гипергеометрической функции, что её не изменяет, получаем:

$$F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x) - F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) = \\ = \frac{(\gamma-\beta)\alpha}{\gamma(\gamma+1)}x\cdot F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2,\ x). \quad (2)$$

Установив эти две формулы, рассмотрим отношения гипергеометрических функций, которые для сокращения обозначим через G и G_1:

$$\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}{F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1,\ x)} = G(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x),$$

$$\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)} = G_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x).$$

Деля все члены формулы (1) на $F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1,\ x)$, находим:

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 - \frac{(\gamma-\alpha)\beta}{\gamma(\gamma+1)} x \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)} =$$

$$= 1 - \frac{(\gamma-\alpha)\beta}{\gamma(\gamma+1)} x \frac{1}{G_1(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}. \quad (3)$$

Подобным же образом формула (2) даёт:

$$G_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 - \frac{(\gamma-\beta)\alpha}{\gamma(\gamma+1)} x \frac{1}{G(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}. \quad (4)$$

Пользуясь попеременно формулами (3) и (4), мы получим разложение в непрерывную дробь отношения двух гипергеометрических рядов

$$\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{G_1(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{G(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \cfrac{a_3 x}{G_1(\alpha+2, \beta+1, \gamma+3, x)}}}} = \ldots,$$

где коэффициенты суть

$$a_1 = \frac{(\gamma-\alpha)\beta}{\gamma(\gamma+1)}; \quad a_2 = \frac{(\gamma+1-\beta)(\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$a_3 = \frac{(\gamma+1-\alpha)(\beta+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}; \ldots$$

Нетрудно видеть, что каждый последующий коэффициент получается из предыдущего заменой α на β, β на $\alpha+1$ и γ на $\gamma+1$.

Таким образом, получаем следующее разложение в непрерывную дробь:

$$\frac{1}{G(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\cdots-\cfrac{a_{2k+1}x}{G_1(\alpha+k+1,\beta+k,\gamma+2k+1,x)}}}}$$

или

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\cdots-\cfrac{a_{2k+2}x}{G(\alpha+k+1,\beta+k+1,\gamma+2k+2,x)}}}} \qquad \text{(I)}$$

где

$$a_{2k+1}=\frac{(\gamma+k-\alpha)(\beta+k)}{(\gamma+2k)(\gamma+2k+1)};$$
$$a_{2k+2}=\frac{(\gamma+k+1-\beta)(\alpha+k+1)}{(\gamma+2k+1)(\gamma+2k+2)}. \qquad (5)$$

Из этого разложения, однако, ещё не следует равенство

$$\frac{1}{G(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\cfrac{a_3x}{1-\cdots-\cfrac{a_{2k}x}{1-\cfrac{a_{2k+1}x}{1-\cdots}}}}}}, \qquad \text{(II)}$$

представляющее $\frac{1}{G(\alpha,\beta,\gamma,x)}$ в виде бесконечной дроби. Справедливость последнего ещё придётся доказать.

Для этого необходимо:

1) выяснить сходимость бесконечной дроби (II),

2) доказать, что эта последняя действительно представляет выражение

$$\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)}.$$

11. Будем изучать дробь эту не с начала, а с некоторого звена, достаточно удалённого от начального. Именно, рассмотрим бесконечную дробь

$$-\cfrac{a_i x}{1-\cfrac{a_{i+1} x}{1-\cfrac{a_{i+2} x}{1-\ddots}}},$$

где значок i выберем столь большим, чтобы коэффициент a_j при $j \geqslant i$ был положительным и достаточно мало отличался от $\frac{1}{4}$. Это условие всегда может быть выполнено, так как при достаточно большом k коэффициенты a_{2k+1} и a_{2k+2} будут как угодно близки к $\frac{1}{4}$, как это следует из формул (5).

При этом условии произведение $a_j x$ как угодно близко к $\frac{1}{4}x$. Мы будем предполагать, что оно достаточно близко к $\frac{1}{4}x$, согласно с требованием, которое выяснится в дальнейшем.

Для доказательства сходимости рассматриваемой дроби воспользуемся теоремой n° 6, по которой дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots}}$$

с положительными знаменателями сходится, если $b_i - c_i > 1$, где $c_i = |a_i|$, Чтобы применить эту теорему, надо сделать знаменатели нашей дроби бо́льшими единицы. Для этого помножим числители и знаменатели дроби на некоторый неопределённый множитель $h > 1$; тогда получим дробь вида

$$\cfrac{a_i h x}{h - \cfrac{a_{i+1} h^2 x}{h - \cfrac{a_{i+2} h^2 x}{h - \ddots}}} \tag{6}$$

Так как мы предполагаем, что $|x| = \xi < 1$, а произведение $a_j x$ достаточно близко к $\frac{1}{4} x$, то всегда можно найти число θ, весьма мало отличающееся от $\frac{1}{4}$ и меньшее $\frac{1}{4}$, такое, что $|a_j x| < \theta$ и, следовательно;

$$|a_j h^2 x| < \theta h^2. \tag{7}$$

Заметив это, распорядимся неопределённым пока ещё множителем h так, чтобы непрерывная дробь удовлетворяла условию сходимости, т. е. чтобы

$$h - |a_j h^2 x| > 1. \tag{8}$$

Ввиду неравенства (7) последнее неравенство будет выполнено, если выберем h так, чтобы

$$h - \theta h^2 = 1.$$

Одно из значений h, удовлетворяющих последнему уравнению, лежит между 1 и 2, что видно из того, что трёхчлен

$$\theta h^2 - h + 1$$

положителен для $h = 1$ и отрицателен для $h = 2$.

Взяв за h это именно значение, мы удовлетворим условию сходимости непрерывной дроби. А так как такое h всегда можно найти, то дробь (II), начиная с того места, с которого мы её рассматриваем, сходящаяся.

Покажем теперь, что если непрерывная дробь сходится, начиная с некоторого места, то она сходится, вообще говоря, и с начала. Пусть имеется непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}}$$

Положим

$$z_i^{(n)}=\cfrac{a_i}{b_i+\cfrac{a_{i+1}}{b_{i+1}+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}.$$

Тогда при $n>k$

$$z_1^{(n)}=\frac{P_{k-1}+z_k^{(n)}P_{k-2}}{Q_{k-1}+z_k^{(n)}Q_{k-2}}.$$

Если непрерывная дробь сходится, начиная со звена a_k, то существует и конечен

$$\lim_{n\to\infty} z_k^{(n)}=z_k.$$

Из написанной нами формулы следует, что, вообще говоря, существует и конечен

$$z_1=\lim_{n\to\infty} z_1^{(n)}=\frac{P_{k-1}+z_kP_{k-2}}{Q_{k-1}+z_kQ_{k-2}}.$$

Исключение представится в том случае, когда

$$Q_{k-1}+z_kQ_{k-2}=0.$$

В этом случае наверное

$$P_{k-1}+z_kP_{k-2}\neq 0,$$

так как иначе мы имели бы абсурдное равенство

$$P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}=0.$$

В исключительном случае $z_1^{(n)}$ имеет бесконечный предел, но уже $z_2^{(n)}$ имеет конечный предел, т. е. наша непрерывная дробь будет сходиться начиная со второго звена.

12. Перейдём теперь ко второму поставленному вопросу.

Установим сначала некоторое общее положение, которое даёт возможность разрешать подобные вопросы. Положим, взята бесконечная непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n+\ddots}}},$$

для которой $b_i - |a_i| > 1$. Допустим, что мы получили эту сходящуюся непрерывную дробь, разлагая некоторое число H, так что

$$H=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n+\cfrac{\lambda a_{n+1}}{b_{n+1}}}}},$$

где λ есть поправка, которую надо ввести для того, чтобы дробь, остановленная на некотором звене, равнялась числу H.

Докажем, что если λ, изменяясь вместе с n, остаётся конечным и не превосходит некоторой величины, определяемой неравенством (*) (см. дальше), как бы велико n ни было, то бесконечная дробь равна H. Для доказательства рассмотрим подходящие дроби к нашей непрерывной

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \ldots,\ \frac{P_n}{Q_n},\ \ldots,$$

где все $Q_i > 0$ и $Q_{n+1} > Q_n$. Известно, что

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n b_{n+1}+P_{n-1}a_{n+1}}{Q_n b_{n+1}+Q_{n-1}a_{n+1}}.$$

Поэтому

$$H=\frac{P_nb_{n+1}+P_{n-1}a_{n+1}\lambda}{Q_nb_{n+1}+Q_{n-1}a_{n+1}\lambda},$$

$$H-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\lambda a_{n+1}(P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1})}{Q_n(Q_nb_{n+1}+Q_{n-1}a_{n+1}\lambda)}=$$

$$=\pm\frac{\lambda a_1a_2\,\ldots\,a_{n+1}}{Q_n(Q_nb_{n+1}+Q_{n-1}a_{n+1}\lambda)}=$$

$$=\pm\frac{\lambda a_1a_2\,\ldots\,a_{n+1}}{Q_n[Q_{n+1}+(\lambda-1)a_{n+1}Q_{n-1}]}.$$

Сравнивая разность

$$H-\frac{P_n}{Q_n}=\pm\frac{\lambda a_1a_2\,\ldots\,a_{n+1}}{Q_n[Q_{n+1}+(\lambda-1)a_{n+1}Q_{n-1}]}$$

с разностью

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\pm\frac{a_1a_2\,\ldots\,a_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}},$$

находим:

$$H-\frac{P_n}{Q_n}=\left[\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right]\cdot\frac{\lambda Q_{n+1}}{Q_{n+1}+(\lambda-1)a_{n+1}Q_{n-1}}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(H-\frac{P_n}{Q_n}\right)=0$. Но по условию

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right)=0.$$

Остаётся рассмотреть только множитель

$$\frac{\lambda Q_{n+1}}{Q_{n+1}+(\lambda-1)a_{n+1}Q_{n-1}}.$$

Положим, что λ удовлетворяет неравенству

$$|(\lambda-1)a_{n+1}|<\eta, \qquad (*)$$

как бы велико n ни было, при одном и том же $\eta<1$. Тогда

$$Q_{n+1}+(\lambda-1)a_{n+1}Q_{n-1}>Q_{n+1}-\eta Q_{n-1}>Q_{n+1}(1-\eta).$$

А потому весь множитель

$$\frac{\lambda Q_{n+1}}{Q_{n+1}+(\lambda-1)\,a_{n+1}Q_{n-1}}$$

остаётся меньше конечного числа $\frac{\lambda_0}{1-\eta}$, как бы велико n ни было, так как λ по условию ограничено. Из этого заключаем, что $\frac{P_n}{Q_n}$ при достаточно большом n будет как угодно близко к H, т. е. что

$$H=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}.$$

13. Применим эту теорему к интересующей нас непрерывной дроби (II) и выражению $\frac{1}{G(\alpha,\beta,\gamma,x)}$ для случая, когда $x>0$.

Условие (*) должно быть написано так:

$$|(\lambda-1)\,a_j x h^2|<\eta<1.$$

Мы будем предполагать $\lambda>1$, так как в том случае, который мы рассматриваем, это действительно так (см. дальше). Поэтому предыдущее неравенство можно написать в виде

$$(\lambda-1)\,h^2\,|a_j x|<\eta<1.$$

Это последнее нерваенство удовлетворится, если можно будет удовлетворить неравенству $(\lambda-1)\,h^2\theta<\eta$, или, так как $h-1=\theta h^2$, — неравенству

$$\lambda-1<\frac{\eta}{h-1}. \qquad (**)$$

При этом следует заметить, что, выбирая η достаточно близким к единице, мы можем дробь $\frac{\eta}{h-1}$ сделать как угодно близкой к единице. Соответственно этому неравенство (**) можно написать так:

$$\lambda<2+\frac{\varepsilon}{h-1}.$$

Это показывает, что основное условие (*) будет удовлетворено, если λ можно выбрать так, чтобы оно было меньше некоторого числа, которое больше 2 и достаточно близко к 2.

Мы уже имели разложение (I)

$$\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \ddots - \cfrac{a_{2k} x}{G(\alpha + k, \beta + k, \gamma + 2k, x)}}}}.$$

Желая доказать, что бесконечная дробь (II) в действительности выражает величину $\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)}$, мы должны показать, как это уже выяснено, что множитель

$$\lambda = \frac{1}{G(\alpha + k, \beta + k, \gamma + 2k, x)}$$

при достаточно большом k меньше некоторого числа, которое больше 2 и достаточно близко к 2. По обозначению

$$\frac{1}{G(\alpha + k, \beta + k, \gamma + 2k, x)} =$$

$$= \frac{F(\alpha + k + 1, \beta + k, \gamma + 2k + 1, x)}{F(\alpha + k, \beta + k, \gamma + 2k, x)} = \frac{\sum_0^\infty C_m x^m}{\sum_0^\infty A_m x^m}.$$

Гипергеометрические ряды, стоящие в числителе и знаменателе, предполагаются сходящимися; коэффициенты их членов можно считать числами положительными при достаточно большом k, и так как $x > 0$, то ряды эти состоят исключительно из положительных членов. Поэтому к отношению рассматриваемых сумм мы можем применить теорему: *Если* $\frac{C_m}{A_m} < L$ *для всякого* m, *то и* $\frac{\sum_0^\infty C_m x^m}{\sum_0^\infty A_m x^m} < L$.

Рассматривая отношение $\frac{C_m}{A_m}$, видим, что

$$\frac{C_m}{A_m}=\frac{(\alpha+k+m)(\gamma+2k)}{(\alpha+k)(\gamma+2k+m)}.$$

Отношение это мы должны исследовать для различных m, от 0 до ∞. Легко видеть, что вообще дробь

$$\omega=\frac{p+qm}{r+sm}$$

с возрастанием m от 0 до ∞ или всё время возрастает или всё время убывает

Но при $m=0$ $\frac{C_m}{A_m}=1$, а при $m=\infty$ $\frac{C_m}{A_m}=\frac{\gamma+2k}{\alpha+k}$. Таким образом, мы видим, что отношение $\frac{C_m}{A_m}$ постоянно заключено в известных границах. При достаточно же большом k $\frac{\gamma+2k}{\alpha+k}>1$ и притом как угодно близко к 2. Итак, отношение $\frac{C_m}{A_m}$, а с ним вместе и само λ при достаточно большом k больше единицы и в то же время меньше любого заданного числа, которое больше 2, что и требовалось показать.

14. Установим теперь справедливость равенства (II)

$$\frac{1}{G(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\cdots\cfrac{}{-\cfrac{a_{2k}x}{1-\cfrac{a_{2k+1}x}{1-\cdots}}}}}}$$

и для случая $x<0$.

Мы имеем разложение (I) выражения $\frac{1}{G(\alpha,\beta,\gamma,x)}$. Разложение это мы можем считать продолженным столь далеко, что все коэффициенты, начиная с a_{2k}, положительны. Если мы теперь докажем, что $\frac{1}{G(\alpha+k,\beta+k,\gamma+2k,x)}$, начиная с некоторого значения k и для всех последующих также >0, то выражение

$$-\frac{a_{2k}x}{G(\alpha+k, \beta+k, \gamma+2k, x)}$$

будет >0 для всякого k, начиная с некоторого достаточно большого. Тогда равенство (II) будет прямым результатом ранее доказанной теоремы (см. n° 9).

Воспользуемся формулой

$$F(\alpha', \beta', \gamma', x) = \frac{\int\limits_0^1 u^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma'-\beta'-1}(1-xu)^{-\alpha'}du}{\int\limits_0^1 u^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma'-\beta'-1}du},$$

имеющей смысл при

$$\beta'>0, \quad \gamma'>\beta',$$

что при достаточно большом k мы можем предполагать выполненным. Так как $u>0$, $1-u>0$, $1-xu>0$, то оба определённых интеграла положительны.

Отсюда следует, что $F(\alpha', \beta', \gamma', x)>0$, а потому и

$$\frac{1}{G(\alpha+k, \beta+k, \gamma+2k, x)}>0,$$

так что для случая, когда все требуемые нами условия выполнены с первого же члена непрерывной дроби, равенство (II), очевидно, справедливо (см. теорему n° 9).

Если же эти условия выполнены, только начиная с члена $a_{2k}x$, то по той же теореме имеем право написать

$$\frac{1}{G(\alpha+k, \beta+k, \gamma+2k, x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_{2k}x}{1-\cfrac{a_{2k+1}x}{1-\ddots}}},$$

а следовательно, и формулу (II), для чего достаточно добавить начальные звенья непрерывной дроби. При этом, конечно, может встретиться случай, когда в результате такого добавления мы получим выражение

$$\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{P_{2k-1} + H_{2k}P_{2k-2}}{Q_{2k-1} + H_{2k}Q_{2k-2}},$$

$$\left[H_{2k} = \frac{1}{G(\alpha + k, \beta + k, \gamma + 2k, x)}\right],$$

в котором знаменатель $Q_{2k-1} + H_{2k}Q_{2k-2}$ равен нулю. Но тогда это будет означать, что

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = 0.$$

15. Отметим некоторые частные случаи, которые могут встретиться при рассмотрении функции $G(\alpha, \beta, \gamma, x)$ и обращении её в непрерывную дробь.

1) α или β равняется целому отрицательному числу. Этот случай — один из простейших, так как тогда гипергеометрические ряды $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ и $F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, x)$ заключают конечное число членов и представляют целые функции от x. Функция же $\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ есть рациональная дробь.

Непрерывная дробь, выражающая величину $\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)}$, конечна.

2) $\alpha = 0$. Тогда $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1$ и $\frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = F(1, \beta, \gamma + 1, x)$. Разложение в непрерывную дробь выражения $\frac{1}{G(0, \beta, \gamma, x)}$ даёт прямо разложение в непрерывную дробь гипергеометрического ряда $F(1, \beta, \gamma + 1, x)$.

16. Рассмотрим подробнее два частных примера, относящихся к случаю $\alpha = 0$.

I пример. Известно, что

$$\ln\frac{1+t}{1-t} = 2t\left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \ldots\right).$$

Нетрудно проверить, что ряд, заключённый в скобки, представляет гипергеометрический ряд для случая $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $x = t^2$, так что

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2t \cdot F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, t^2\right).$$

Разложим в ряд выражение

$$\frac{1}{G\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t^2\right)} = \frac{F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, t^2\right)}{F\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t^2\right)} = F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, t^2\right).$$

Для этого вычисляем по формулам (5) n° 10 последовательные коэффициенты a_i:

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2^2}{3 \cdot 5}, \quad a_3 = \frac{3^2}{5 \cdot 7}, \quad a_4 = \frac{4^2}{7 \cdot 9}, \quad \ldots$$

Тогда

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = \cfrac{2t}{1 - \cfrac{\frac{t^2}{1 \cdot 3}}{1 - \cfrac{\frac{4t^2}{3 \cdot 5}}{1 - \cfrac{\frac{9t^2}{5 \cdot 7}}{1 - \ddots}}}} = \cfrac{2t}{1 - \cfrac{t^2}{3 - \cfrac{4t^2}{5 - \cfrac{9t^2}{7 - \ddots}}}}.$$

Здесь $t^2 > 0$. Однако можно принять $t^2 < 0$, т. е. $t = zi$ (где $i = \sqrt{-1}$); тогда из предыдущей формулы выведем разложение в непрерывную дробь $\operatorname{arc\,tg} z$:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{4z^2}{5 + \ddots}}}.$$

Последнюю формулу можно, впрочем, получить и непосредственно тем же путём, как и для $\ln \frac{1+t}{1-t}$.

II пример. Известно, что

$$e^t - e^{-t} = 2t\left(1 + \frac{t^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots\right),$$

$$e^t + e^{-t} = 2\left(1 + \frac{t^2}{1\cdot 2} + \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\right).$$

Легко убедиться, что ряды, стоящие в скобках, представляют пределы двух гипергеометрических рядов при беспредельном увеличении некоторых параметров. А именно

$$1 + \frac{t^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots = \lim_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k+1, k', \frac{3}{2}, \frac{t^2}{4kk'}\right),$$

$$1 + \frac{t^2}{1\cdot 2} + \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots = \lim_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k, k', \frac{1}{2}, \frac{t^2}{4kk'}\right).$$

На основании этого, пользуясь формулой (II) для случая $\alpha = k$, $\beta = k'$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $x = \frac{t^2}{4kk'}$ и переходя к пределу $k \to \infty$, $k' \to \infty$, мы чисто формально получаем:

$$\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \cfrac{t}{1 + \cfrac{\frac{t^2}{1\cdot 3}}{1 + \cfrac{\frac{t^2}{3\cdot 5}}{1 + \ldots}}}.$$

В частном случае при $t = \frac{1}{2}$ получается формула

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}},$$

которая, с одной стороны, может служить для нахождения числа e, а с другой стороны, показывает, что e — число иррациональное.

Вывод разложения в непрерывную дробь выражения $\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$, конечно, не строг вследствие перехода к пределу. Поэтому считаем необходимым указать, что к тому же результату мы пришли бы, если бы поставили себе задачу непосредственно обратить в непрерывную дробь отношение двух рядов вида

$$\Phi\left(\frac{2l+1}{2}, \frac{t^2}{4}\right) = 1 + \frac{t^2}{2(2l+1)} + \frac{t^4}{2\cdot 4(2l+1)(2l+3)} + \\ + \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6(2l+1)(2l+3)(2l+5)} + \ldots,$$

соответственно $l=1$ и $l=0$, и провели рассуждение, подобное тому, которое проведено по отношению к гипергеометрическим рядам.

III. Обращение рядов в непрерывные дроби

17. Перейдём теперь к рассмотрению непрерывной дроби

$$\cfrac{a_1}{p_1 + \cfrac{a_2}{p_2 + \cfrac{a_3}{p_3 + \ddots}}}, \qquad (1)$$

в которой $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — некоторые числовые коэффициенты (обычно их делают равными единице), а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — целые рациональные функции от x. Дробь эту мы не предполагаем сходящейся, и нужна она будет нам лишь ради своих подходящих дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \ldots$$

Припомним формулу

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{a_1}{Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + (-1)^m \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{Q_{m-1} Q_m}.$$

Если мы будем раскладывать подходящие дроби в ряды по убывающим степеням x, то, как показывает эта формула, при переходе от $\frac{P_n}{Q_n}$ к $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ во всяком случае останутся без изменения члены ряда до

$$\frac{A_{2N}}{x^{2N}}$$

включительно, если N есть показатель степени Q_n. Поэтому каждой непрерывной дроби (1) можно однозначно сопоставить степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{x^k}, \qquad (2)$$

вообще говоря, расходящийся, обладающий тем свойством, что разложение в ряд по степеням $\frac{1}{x}$ всякой подходящей к (1) дроби совпадает с (2) во всяком случае до члена

$$\frac{A_{2N}}{x^{2N}}$$

включительно, если N есть степень знаменателя подходящей дроби.

Положим теперь, что дан ряд (2), и покажем, что ему можно отнести непрерывную дробь вида (1), для которой он является соответствующим рядом в указанном только что смысле.

Мы воспользуемся при этом тем, что над рядами вида (2) можно производить чисто формально действия сложения, вычитания, умножения и деления. Сходимость при этом не предполагается, а речь идёт лишь о последовательном нахождении новых коэффициентов по старым. Однако ничто не мешает нам обозначать рассматриваемые ряды буквами; например,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{x^k} = z_1.$$

Будем делить a_1 на ряд z_1. Предполагая, что $A_1 \neq 0$, мы получаем в частном многочлен

$$\frac{a_1}{A_1}x - \frac{A_2 a_1}{A_1^2}.$$

Теперь мы можем написать

$$z_1 = \frac{a_1}{\frac{a_1}{A_1}x - \frac{A_2 a_1}{A_1^2} + z_2},$$

где z_2 есть некоторый новый ряд того же типа, что и z_1. Эту формулу нужно понимать в том смысле, что при формальном перемножении рядов

$$z_1, \quad \frac{a_1}{A_1}x - \frac{A_2 a_1}{A_1^2} + z_2$$

исчезнут все члены, кроме члена a_1. Пусть

$$z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{x^k}$$

и пусть $B_1 \neq 0$. Тогда, деля a_2 на z_2, мы получим в частном

$$\frac{a_2}{B_1}x - \frac{B_2 a_2}{B_1^2}$$

и снова получим некоторый ряд z_3. Это даст нам

$$z_1 = \frac{a_1}{\frac{a_1}{A_1}x - \frac{A_2 a_1}{A_1^2} + \frac{a_2}{\frac{a_2}{B_1}x - \frac{B_2 a_2}{B_1^2} + z_3}}.$$

Повторяя этот процесс, мы получим непрерывную дробь

$$\cfrac{a_1}{p_1 + \cfrac{a_2}{p_2 + \cfrac{a_3}{p_3 + \ddots}}}$$

Мы сделали предположение, что $A_1 \neq 0$. Но способ определения p_1 нисколько не изменится, если предположить $A_1 = 0$, только степень целой функции p_1 будет выше, так что, например, если $A_1 = A_2 = \ldots = A_{i-1} = 0$, $A_i \neq 0$, то p_1 будет степени i. То же следует сказать и о целых функциях $p_2, p_3, \ldots$

Теперь мы должны показать, что ряд (2) соответствует полученной непрерывной дроби. Пусть взята подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ к нашей дроби и пусть её знаменатель имеет степень N.

Мы видели выше, что

$$z_1 = \cfrac{a_1}{p_1 + \cfrac{a_2}{p_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{p_n + z_{n+1}}}}$$

или

$$z_1 = \frac{P_n + P_{n-1}z_{n+1}}{Q_n + Q_{n-1}z_{n+1}},$$

где z_{n+1} — некоторый ряд того же вида, что и (2). Это соотношение нужно понимать в том смысле, что если выполнить чисто формально указанные справа операции, то получится ряд z_1.

Рассмотрим теперь разность

$$z_1 - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{z_{n+1}(P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1})}{Q_n(Q_n + Q_{n-1}z_{n+1})}.$$

$\frac{P_n}{Q_n}$ раскладывается в ряд по степеням $\frac{1}{x}$, и мы можем в левой части заменить $\frac{P_n}{Q_n}$ этим разложением. Так как $P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}$ есть константа, то числитель правой части есть ряд вида

$$\frac{L_1}{x} + \frac{L_2}{x^2} + \ldots$$

С другой стороны, знаменатель, очевидно, есть ряд вида

$$\alpha x^{2N}+\beta x^{2N-1}+\ldots+\omega+\frac{M_1}{x}+\frac{M_2}{x^2}+\ldots$$

Поэтому, выполняя формально деление в правой части, мы получим ряд, начинающийся с члена вида

$$\frac{R}{x^{2N+1}}.$$

Следовательно, разложение в ряд дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ совпадает с рядом z_1 во всяком случае до члена

$$\frac{A_{2N}}{x^{2N}}$$

включительно.

Приведённое построение для ряда (2) непрерывной дроби (1), которой ряд (2) соответствует в указанном смысле, будем называть обращением ряда в непрерывную дробь. Часто будем подходящие к дроби (1) называть подходящими к ряду (2).

Для оправдания этой терминологии необходимо доказать, что различным непрерывным дробям отвечают различные степенные ряды. Это обстоятельство является следствием теоремы, которую мы докажем в следующем n°.

18. Теорема. *Если разложение в ряд по степеням $\frac{1}{x}$ рациональной дроби $\frac{P'}{Q'}$, знаменатель которой имеет степень N, совпадает с рядом z_1, по крайней мере, до члена*

$$\frac{A_{2N}}{x^{2N}}$$

включительно, то $\frac{P'}{Q'}$ есть одна из подходящих дробей к ряду z_1.

Доказательство этой теоремы разобьём на две части сообразно двум возможным предположениям.

Первое предположение: среди различных подходящих дробей для ряда z_1 есть дробь $\frac{P}{Q}$, знаменатель которой той же степени, что и Q'. Тогда разность

$$\frac{P}{Q}-\frac{P'}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{QQ'}=\frac{F(x)}{QQ'},$$

где $F(x)$ — целая функция, будет иметь знаменатель степени $2N$, а потому, если $F(x)\neq 0$, будучи разложена в ряд, она даёт старший член вида $\frac{\gamma}{x^{2N}}$ или высшей степени. Между тем из соотношений

$$z_1-\frac{P'}{Q'}=\frac{\alpha'}{x^{2N+1}}+\frac{\beta'}{x^{2N+2}}+\ldots,$$

$$z_1-\frac{P}{Q}=\frac{\alpha}{x^{2N+1}}+\frac{\beta}{x^{2N+2}}+\ldots$$

следует

$$\frac{P}{Q}-\frac{P'}{Q'}=\frac{\alpha'-\alpha}{x^{2N+1}}+\frac{\beta'-\beta}{x^{2N+2}}+\ldots,$$

что противоречит предыдущему. Поэтому необходимо заключить, что $F(x)=0$, т. е. что $\frac{P}{Q}=\frac{P'}{Q'}$.

Второе предположение: среди подходящих дробей для ряда z_1

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \ldots,\ \frac{P_m}{Q_m},\ \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}},\ \ldots$$

нет такой, знаменатель которой будет той же степени, что и Q'.

Примечание. Если все знаменатели p_1, p_2, $\ldots$, p_m, p_{m+1}, $\ldots$ непрерывной дроби будут функциями, линейными относительно x, то среди подходящих дробей будут дроби со знаменателями какой угодно степени, начиная с единицы. Отсутствие подходящей дроби со знаменателями некоторой степени может произойти только тогда, когда среди функций p_1, p_2, $\ldots$, p_m, p_{m+1}, $\ldots$ некоторые выше первой степени.

Отметим тогда две смежные дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ и $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$ такие, чтобы степени их знаменателей были у одной больше, а у другой меньше степени знаменателя Q', и обозначим

$$\begin{array}{lll} \text{степень } Q_m & \text{через } \mu, \\ \quad » \quad Q' & \quad » \quad N, \\ \quad » \quad Q_{m+1} & \quad » \quad \mu'. \end{array}$$

Докажем, что и в этом случае $\frac{P'}{Q'}=\frac{P_m}{Q_m}$, т. е. что дробь $\frac{P'}{Q'}$ заключает в числителе и знаменателе некоторый множитель степени $N-\mu$ относительно x, сократив на который, мы и получим дробь $\frac{P_m}{Q_m}$.

Для доказательства рассмотрим разность

$$z_1-\frac{P_m}{Q_m}=z_1-\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}+\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}-\frac{P_m}{Q_m}.$$

Так как $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$ есть подходящая дробь для ряда z_1, то разность

$$z_1-\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$$

начинается с члена вида $\frac{k}{x^{2\mu'+1}}$. Кроме того,

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}-\frac{P_m}{Q_m}=\frac{\text{пост. число}}{\text{функция степени } \mu+\mu'}.$$

Поэтому в разложении $z_1-\frac{P_m}{Q_m}$ первым членом будет $\frac{\alpha}{x^{\mu+\mu'}}$, т. е.

$$z_1-\frac{P_m}{Q_m}=\frac{\alpha}{x^{\mu+\mu'}}+\ldots$$

Но по условию

$$z_1-\frac{P'}{Q'}=\frac{\alpha'}{x^{2N+1}}+\ldots$$

Отсюда посредством вычитания находим

$$\frac{P_m}{Q_m}-\frac{P'}{Q'}=\frac{\beta}{x^k}+\ldots,$$

где k равно наименьшему из показателей $\mu+\mu'$ и $2N+1$ или больше их обоих; а так как

$$\mu'+\mu>N+\mu$$

и

$$2N+1>N+\mu,$$

то во всякам случае $k>N+\mu$. С другой же стороны, имеем:

$$\frac{P_m}{Q_m}-\frac{P'}{Q'}=\frac{P_mQ'-P'Q_m}{Q_mQ'}=\frac{F(x)}{\text{функция степени } N+\mu}\,.$$

Поэтому разность $\frac{P_m}{Q_m}-\frac{P'}{Q'}$, будучи разложена по степеням $\frac{1}{x}$, даст первый член вида $\frac{\gamma}{x^l}$, где $l\leqslant N+\mu$, что противоречит предыдущему.

Таким образом, остаётся предположить, что

$$F(x)=P_mQ'-P'Q_m=0,$$

т. е. что

$$\frac{P'}{Q'}=\frac{P_m}{Q_m}\,.$$

Итак, мы видим, что всякая дробь $\frac{P'}{Q'}$, знаменатель которой степени N, определяемая условием

$$z_1-\frac{P'}{Q'}=\frac{\alpha'}{x^{2N+1}}+\frac{\beta'}{x^{2N+2}}+\ldots,$$

совпадает с одной из подходящих дробей или равна ей, т. е. обращается в неё после сокращения.

До сих пор мы предполагали, что ряд z_1 не содержит целой части, но, конечно, всё остаётся справедливым и в том случае, когда члену $\frac{A_1}{x}$ предшествует любая целая функция от x.

19. Приложим найденные свойства подходящих дробей к решению уравнения

$$P^2 - Q^2(x^2 - h^2) = L,$$

которое встречается в одном вопросе о функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Здесь P и Q — неизвестные целые функции от x соответственно n-й и $(n-1)$-й степени с одинаковыми коэффициентами при старших членах, а L и h — некоторые постоянные числа, из которых h задано наперёд.

Нетрудно убедиться, что функции P и Q могут быть найдены разложением $\sqrt{x^2-h^2}$ в непрерывную дробь. Действительно, из уравнения имеем

$$(P - Q\sqrt{x^2-h^2})(P + Q\sqrt{x^2-h^2}) = L,$$

откуда

$$P - Q\sqrt{x^2-h^2} = \frac{L}{P + Q\sqrt{x^2-h^2}}$$

или

$$\frac{P}{Q} - \sqrt{x^2-h^2} = \frac{L}{Q(P + Q\sqrt{x^2-h^2})}.$$

Рассмотрим последнее равенство. Q — $(n-1)$-й степени

$$P + Q\sqrt{x^2-h^2} = 2\alpha x^n\left(1 + \frac{\beta}{x} + \ldots\right)$$

(α — общий коэффициент при старшем члене функций P и Q),

$$\frac{L}{Q(P + Q\sqrt{x^2-h^2})} = \frac{L}{2\alpha^2 x^{2n-1}\left(1 + \frac{\beta_1}{x} + \ldots\right)}.$$

Разлагая правую часть в ряд по убывающим степеням x, мы найдём

$$\frac{P}{Q} - \sqrt{x^2-h^2} = \frac{L}{2\alpha^2 x^{2n-1}} + \ldots,$$

а это и показывает, что $\frac{P}{Q}$ принадлежит к подходящим дробям разложения $\sqrt{x^2-h^2}$ в непрерывную дробь.

Производя это разложение, найдём:

$$\sqrt{x^2-h^2}=x+\frac{1}{y}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}-x}=\frac{\sqrt{x^2-h^2}+x}{-h^2},$$

$$\sqrt{x^2-h^2}=x-\frac{h^2}{x+\sqrt{x^2-h^2}}=$$

$$=x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\ldots}}}$$

Так как в этой дроби все знаменатели 1-й степени, то в ряду подходящих дробей найдутся дроби с любой наперёд заданной степенью в знаменателе; поэтому, чтобы найти $\frac{P}{Q}$, достаточно взять

$$\frac{P}{Q}=x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\ddots-\cfrac{h^2}{2x}}}$$

где число звеньев есть $n-1$, не считая целой части.

20. Покажем теперь, как, не обращая ряд в непрерывную дробь, получить подходящую, когда задана степень знаменателя. Пусть

$$z=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\ldots$$

Ищем подходящую дробь $\frac{P}{Q}$ со знаменателем степени n. Общий вид её будет:

$$\frac{P}{Q}=\frac{d_0x^{n-1}+d_1x^{n-2}+\ldots+d_{n-2}x+d_{n-1}}{c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n}.$$

На основании известной уже теоремы $\frac{P}{Q}$ будет подходящей дробью, если разложение разности

$$z-\frac{P}{Q}$$

начинается с члена $\frac{B}{x^{2n+1}}$, т. е. если разложение

$$\left(z-\frac{P}{Q}\right)Q$$

начинается с члена $\frac{B'}{x^{n+1}}$. Но

$$\left(z-\frac{P}{Q}\right)Q=\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\ldots\right)(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\\+\ldots+c^n)-(d_0x^{n-1}+d_1x^{n-2}+\ldots+d_{n-1}),$$

и наше требование приводит к уравнениям

$$\left.\begin{array}{l}A_1c_n+A_2c_{n-1}+\ldots+A_nc_1+A_{n+1}c_0=0,\\ A_2c_n+A_3c_{n-1}+\ldots+A_{n+1}c_1+A_{n+2}c_0=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_nc_n+A_{n+1}c_{n-1}+\ldots+A_{2n-1}c_1+A_{2n}c_0=0,\end{array}\right\}\quad\text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A_1c_0-d_0=0,\\ A_1c_1+A_2c_0-d_1=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_1c_{n-1}+A_2c_{n-2}+\ldots+A_{n-1}c_1+A_nc_0-d_{n-1}=0.\end{array}\right\}\text{(II)}$$

Система уравнений (I) служит для определения коэффициентов c, т. е. знаменателя подходящей дроби, система же (II) — для определения числителя, когда уже знаменатель найден.

В дальнейшем нам придётся ссылаться на одну теорему, относящуюся к решению системы линейных однородных уравнений, которую здесь и приведём без доказательства.

Теорема. *Система линейных однородных уравнений, в которой число неизвестных больше числа уравнений, всегда допускает бесчисленное множество решений, где не все неизвестные равны нулю.*

Рассматривая систему (I), мы видим, что она представляет систему n уравнений с $n+1$ неизвестными; поэтому на основании только что высказанной теоремы заключаем, что система (I) всегда допускает решение, где не все c_0, c_1, c_2, ..., c_n равны нулю.

Остановимся на случае, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_2 & A_{n+1} & \dots & A_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & A_{n+1} & \dots & A_{2n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда неизвестное c_0 можно выбрать по произволу, а отношения других к нему будут иметь вполне определённые значения. Неопределённость коэффициента c_0 не имеет значения в отношении определения подходящей дроби, так как никто нам не мешает заранее назначить коэффициент старшего члена знаменателя. Поэтому мы можем сказать, что если $\Delta \neq 0$, то знаменатель подходящей дроби определяется вполне. В случае, когда $\Delta = 0$, мы можем c_0 положить равным нулю, а для других коэффициентов наверное найдутся решения, где не все неизвестные равны нулю. Тогда степень знаменателя Q будет ниже n.

Определение числителя по системе (II) не может доставить никаких затруднений по самому виду уравнений, раз коэффициенты c_0, c_1, ..., c_n уже известны.

IV. О разложении суммы $\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$ в непрерывную дробь

21. Остановимся теперь на рассмотрении сумм вида $\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$, где суммирование распространено на определённые значения t, число которых может быть как конечным, так и бесконечным. Все наши рассуждения будут также относиться и к предельному случаю, когда вместо суммы взят интеграл с конечными пределами

$$\int_a^b \frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Мы будем предполагать $\theta(t) > 0$ и $f(t) \geqslant 0$ для рассматриваемых значений t. Мы поставим себе целью изучение свойств знаменателей и числителей подходящих дробей для ряда, в который разлагается сумма $\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$, каковые, как увидим в дальнейшем, имеют большое значение во многих вопросах, относящихся преимущественно к приближённым вычислениям. Однако, имея в виду рассмотреть вопрос с более общей точки зрения, мы не будем на самом деле вычислять определитель Δ системы (I) (см. n° 20) и доказывать, что для взятой суммы он не равен нулю. Мы, не изучая самого определителя, пользуясь системой (I), докажем, что никакой неопределённости в нахождении подходящих дробей для взятой суммы не встретится.

Разложим сначала сумму

$$\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$$

по убывающим степеням буквы x:

$$\sum \frac{\theta(t)}{x-t} = \sum \theta(t) \left\{ \frac{1}{x} + \frac{t}{x^2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{x^m} + \ldots \right\} =$$
$$= \frac{1}{x} \sum \theta(t) + \frac{1}{x^2} \sum t\,\theta(t) + \ldots + \frac{1}{x^m} \sum t^{m-1}\theta(t) + \ldots$$

Тогда по обозначению, установленному выше:

$$A_1 = \sum \theta(t), \quad A_2 = \sum t\,\theta(t), \quad \ldots, \quad A_m = \sum t^{m-1}\,\theta(t), \quad \ldots$$

Для случая, когда вместо суммы имеем интеграл

$$A_k = \int_a^b t^{k-1} f(t)\,dt \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Уравнения, служащие для определения коэффициентов c, будут

$$A_i c_n + A_{i+1} c_{n-1} + \ldots + A_{n+i-1} c_1 + A_{n+i} c_0 = 0,$$
$$\text{где } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

или

$$c_n \sum t^{i-1}\theta(t) + c_{n-1} \sum t^i \theta(t) + \ldots + c_0 \sum t^{n+i-1}\,\theta(t) = 0.$$

Так как c не зависят от t и суммирование везде одного характера, то последнее равенство можно представить в виде

$$\sum (c_n + c_{n-1} t + c_{n-2} t^2 + \ldots + c_0 t^n) t^{i-1} \theta(t) = 0,$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Полагая

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = \varphi(x),$$

получаем уравнение

$$\sum t^{i-1} \varphi(t) \theta(t) = 0,$$

которое и служит для определения знаменателя $\varphi(x)$ подходящей дроби, заменяя собой систему (I), при условии, что оно имеет место для $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Вместо последнего уравнения можно взять более общее

$$\sum \omega(t) \varphi(t) \theta(t) = 0, \qquad (*)$$

где $\omega(x)$ — любая целая функция степени не выше $n-1$. Уравнение это, очевидно, будет равносильно предыдущему при условии, что оно выполняется для всякой целой функции $\omega(x)$ степени не выше $n-1$.

22. Рассматривая теперь знаменатель подходящей дроби для ряда $\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$ как функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию (*), докажем, что это условие вполне определяет $\varphi(x)$, если задан коэффициент c_0 старшего её члена. Заметим, что при конечном числе слагаемых суммы число их не может быть меньше степени знаменателя подходящей дроби.

Условие (*) равносильно системе n уравнений, которые мы получим, полагая $\omega(x) = x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x, 1$. Уравнения эти будут однородными относительно неизвестных коэффициентов. А так как система однородных уравнений, в которых число неизвестных больше числа уравнений, всегда допускает решения, где не все неизвестные равны нулю, то всегда мы можем найти функцию $\varphi(x)$ степени n или выше, удовлетворяющую поставленному условию (*). Но центр тяжести вопроса заключается не в этом почти очевидном заключении, а в том, чтобы показать, что существует одна и только одна функция n-ой степени с заданным коэффициентом при старшем члене, определяемая условием (*). Для этого докажем сначала следующую теорему.

Теорема. *Если целая функция $\varphi(x)$, не равная нулю тождественно, удовлетворяет условию (*) для любой целой функции $\omega(x)$ степени не выше $n-1$ и если число слагаемых суммы (*) не меньше n, то число значений x, лежащих в пределах суммирования, при которых $\varphi(x)$ меняет знак, не меньше n.*

Пусть значения, при которых $\varphi(x)$ меняет знак, будут:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

Предположим, что $m<n$. Тогда за функцию $\omega(x)$ можно принять произведение

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m).$$

Рассматривая сумму

$$\sum \theta(t)\varphi(t)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_m),$$

мы замечаем, что все её слагаемые имеют один и тот же знак. Действительно, при переходе через любое из значений a_i, когда только и может по условию функция $\varphi(x)$ изменить свой знак, одновременно с ней меняет знак и множитель $x-a_i$. Поэтому произведение $(t-a_i)\varphi(t)$, а с ним вместе и всё выражение, стоящее под знаком суммы, сохраняют свой знак. При этом некоторые из слагаемых рассматриваемой суммы могут обратиться и в нуль, если некоторые a_i совпадают с значениями t, на которые распространяется суммирование, но одно по крайней мере из слагаемых отлично от нуля, так как по предположению число слагаемых не меньше n. Таким образом, мы видим, что если бы m было меньше n, то можно было бы составить такую функцию $\omega(x)$ степени не выше $n-1$, которая не удовлетворяет условию (*). Следовательно, m не меньше n.

Отсюда вытекают следующие заключения: 1) $m=n$, т. е. все n корней функции $\varphi(x)$, простые и вещественные и заключены в пределах суммирования; 2) коэффициент c_0 при x^n функции $\varphi(x)$ не равен нулю, так что определитель системы (I) не равен нулю.

Теперь уже нетрудно установить, что уравнение (*) вполне определяет функцию $\varphi(x)$, раз коэффициент старшего члена задан. Для этого достаточно показать, что две функции

$$\varphi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n,$$
$$\Phi(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_n,$$

удовлетворяющие условию (*), не могут отличаться между собой иначе, как постоянным множителем. Действительно, в противном случае из них можно было бы составить новую функцию

$$C_0 \varphi(x) - c_0 \Phi(x) \not\equiv 0$$

степени $n-1$, которая удовлетворяла бы тому же условию (*), что по только что доказанному невозможно.

Итак, мы окончательно выяснили, что раз коэффициент старшего члена функции n-й степени, удовлетворяющей условию (*), задан, то последняя определяется вполне. Тем самым установлена полная определённость вопроса о нахождении знаменателей подходящих дробей для ряда

$$\sum \frac{\theta(t)}{x-t}.$$

23. Что касается числителей, то, как это было уже указано, нахождение их не представляет никакой неопределённости (см. систему II). Самое же определение их может быть сделано в данном случае следующим образом. Обозначим искомый числитель подходящей дроби через $\psi(x)$. Тогда по основной теореме

$$\sum \frac{\theta(t)}{x-t} - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\alpha}{x^{2n+1}} + \ldots \qquad (1)$$

[здесь n — степень знаменателя $\varphi(x)$] или

$$\varphi(x) \sum \frac{\theta(t)}{x-t} - \psi(x) = \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \ldots \qquad (2)$$

Но

$$\varphi(x)\sum\frac{\theta(t)}{x-t}=\sum\frac{\theta(t)\{\varphi(x)-\varphi(t)\}}{x-t}+\sum\frac{\varphi(t)\theta(t)}{x-t}.$$

Частное $\frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{x-t}$, очевидно, есть целая функция степени $n-1$, а потому и сумма

$$\sum\frac{\theta(t)\{\varphi(x)-\varphi(t)\}}{x-t}$$

есть целая функция $n-1$-й степени относительно x. Другую сумму $\sum\frac{\varphi(t)\theta(t)}{x-t}$ разложим в ряд по убывающим степеням буквы x; тогда

$$\sum\frac{\varphi(t)\theta(t)}{x-t}=\frac{1}{x}\sum\varphi(t)\theta(t)+\frac{1}{x^2}\sum t\varphi(t)\theta(t)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{x^n}\sum t^{n-1}\varphi(t)\theta(t)+\frac{1}{x^{n+1}}\sum t^n\varphi(t)\theta(t)+\ldots$$

По свойству функции $\varphi(x)$

$$\sum\varphi(t)\theta(t)=\sum t\varphi(t)\theta(t)=\ldots=\sum t^{n-1}\varphi(t)\theta(t)=0,$$

но $\sum t^n\varphi(t)\theta(t)$ и другие не равны нулю. Из формулы (2) мы заключаем, что искомая целая функция $\psi(x)$ равна целой части выражения $\varphi(x)\sum\frac{\theta(t)}{x-t}$. Поэтому, как это следует из вышеизложенного,

$$\psi(x)=\sum\frac{\theta(t)\{\varphi(x)-\varphi(t)\}}{x-t}. \qquad (**)$$

Формула эта и служит для определения числителя $\psi(x)$, коль скоро знаменатель $\varphi(x)$ дроби уже найден. Нетрудно видеть, что $\psi_n(x)$ есть функция $n-1$-й степени.

24. Покажем теперь, что между тремя функциями $\varphi_n(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(x)$, равно как и между функциями $\psi_n(x)$, $\psi_{n-1}(x)$, $\psi_{n-2}(x)$, где значок определяет степень функции, существует следующая линейная зависимость:

$$\varphi_n(x)=(a_nx+b_n)\varphi_{n-1}(x)+c_n\varphi_{n-2}(x),$$

$$\psi_n(x)=(a_nx+b_n)\psi_{n-1}(x)+c_n\psi_{n-2}(x).$$

Предполагая сначала, что $n>2$, разделим $\varphi_n(x)$ на $\varphi_{n-1}(x)$. Частное будет вида $a_n x+b_n$, а остаток — целая функция $n-2$-й степени, которую и обозначим через $g(x)$. Тогда

$$\varphi_n(x)=(a_n x+b_n)\varphi_{n-1}(x)+g(x).$$

Докажем теперь, что $g(x)$ не может отличаться от $\varphi_{n-2}(x)$ иначе как на постоянный множитель. Для этого умножим предыдущее равенство на произведение $\omega(x)\theta(x)$, где $\omega(x)$ — целая функция $n-3$-й степени, и просуммируем обе части полученного таким образом равенства, заменив, если желаем, для сохранения прежнего обозначения букву x на t:

$$\begin{aligned}&\sum\varphi_n(t)\,\omega(t)\,\theta(t)=\\&=\sum(a_n t+b_n)\,\omega(t)\,\varphi_{n-1}(t)\,\theta(t)+\sum\omega(t)\,g(t)\,\theta(t).\end{aligned}$$

По определению функций $\varphi_n(t)$ и $\varphi_{n-1}(t)$

$$\sum\varphi_n(t)\,\omega(t)\,\theta(t)=\sum\varphi_{n-1}(t)\{(a_n t+b_n)\,\omega(t)\}\,\theta(t)=0,$$

а потому и

$$\sum\omega(t)\,g(t)\,\theta(t)=0.$$

Но мы уже имели теорему, что две функции одной и той же степени, удовлетворяющие условию (*), могут отличаться только постоянным множителем; поэтому

$$g(x)=c_n\varphi_{n-2}(x),$$

что и доказывает справедливость искомой зависимости. Для функций $\psi(x)$ ту же зависимость обнаружим, исходя из равенства (**), их определяющего:

$$\psi_m(x)=\sum\frac{\varphi_m(x)-\varphi_m(t)}{x-t}\,\theta(t). \qquad (**)$$

Так как

$$\begin{aligned}\varphi_n(x)&=(a_n x+b_n)\,\varphi_{n-1}(x)+c_n\varphi_{n-2}(x),\\ \varphi_n(t)&=(a_n t+b_n)\,\varphi_{n-1}(t)+c_n\varphi_{n-2}(t),\end{aligned}$$

то, вычитая, получим:

$$\varphi_n(x)-\varphi_n(t)=(a_nx+b_n)\{\varphi_{n-1}(x)-\varphi_{n-1}(t)\}+$$
$$+a_n(x-t)\varphi_{n-1}(t)+c_n\{\varphi_{n-2}(x)-\varphi_{n-2}(t)\}.$$

Далее, помножим обе части равенства на $\frac{\theta(t)}{x-t}$ и произведём суммирование; тогда

$$\psi_n(x)=\sum(a_nx+b_n)\frac{\varphi_{n-1}(x)-\varphi_{n-1}(t)}{x-t}\theta(t)+$$
$$+a_n\sum\varphi_{n-1}(t)\theta(t)+c_n\sum\frac{\varphi_{n-2}(x)-\varphi_{n-2}(t)}{x-t}\theta(t).$$

Так как

$$\sum\varphi_{n-1}(t)\theta(t)=0,$$

а множитель a_nx+b_n может быть вынесен из-под знака суммы, то и получаем:

$$\psi_n(x)=(a_nx+b_n)\psi_{n-1}(x)+c_n\psi_{n-2}(x).$$

Выведенные соотношения справедливы и для $n=2$, если мы условимся считать $\varphi_0(x)$ равным постоянному числу, а $\psi_0(x)=0$. В этом можно убедиться непосредственно.

V. Приложение подходящих для $\sum\frac{\theta(t)}{x-t}$ дробей к интерполированию по способу наименьших квадратов

25. Положим, имеем некоторую функцию $F(t)$, значения которой известны для тех именно величин t, на которые распространяется суммирование в $\sum\frac{\theta(t)}{x-t}$. Число этих значений пусть будет p. Положим далее, что с целью приближённого вычисления этой функции мы желаем представить её в виде некоторой целой функции $F_0(t)$ степени ниже p:

$$F_0(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_mt^m,$$

так, чтобы $F(t)$ приближённо равнялось $F_0(t)$. Обозначая через $\lambda(t)$ ошибку, которую при этом делаем, мы можем написать:

$$F(t) = F_0(t) + \lambda(t).$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ предложим себе вычислить так, чтобы в известном смысле $F(t)$ представилась в виде целой функции $F_0(t)$ возможно точнее. Именно, предложим себе вычислить их под условием, чтобы сумма

$$W = \sum \theta(t)[\lambda(t)]^2,$$

распространённая на все рассматриваемые значения t, была наименьшей. Такого рода задача называется задачей интерполирования по способу наименьших квадратов.

В сущности вопрос этот представляет задачу об определении коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ так, чтобы функция $\lambda(t)$ наименее уклонялась от нуля при условии, что за меру уклонения принимается значение суммы $\sum \theta(t)[\lambda(t)]^2$. В той и другой форме задача эта относится к разряду задач на максимум и минимум и решается по общим приёмам. Но мы дадим решение её, введя в рассмотрение знаменатели подходящих дробей для $\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$. Форма полученного таким образом решения, как увидим, будет обладать характерными преимуществами. Итак, введём в рассмотрение функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, \varphi_m$; это всё целые функции степени, равной значку при φ. Функциями этими мы воспользуемся для представления целой функции F_0 в виде полинома, линейного относительно $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Очевидно, что, соответственным образом подобрав коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$, мы можем положить

$$F_0(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m =$$
$$= \beta_0\varphi_0(x) + \beta_1\varphi_1(x) + \ldots + \beta_m\varphi_m(x). \quad (1)$$

Тогда сумма W, которая должна быть сделана наименьшей, примет вид

$$W = \sum \theta(t)[F(t) - \beta_0\varphi_0(t) - \beta_1\varphi_1(t) - \ldots - \beta_m\varphi_m(t)]^2.$$

Для нахождения искомого минимума берём производную по β_i, где под i подразумеваем $0, 1, 2, \ldots, m$, и приравниваем её нулю:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \beta_i}=\sum \theta(t)\,[F(t)-$$
$$-\beta_0\varphi_0(t)-\ldots-\beta_m\varphi_m(t)]\,\varphi_i(t)=0. \qquad (2)$$

Производная эта разбивается на несколько сумм:

$$\sum \theta(t)F(t)\,\varphi_i(t)-\beta_0\sum \theta(t)\,\varphi_0(t)\,\varphi_i(t)-\ldots-$$
$$-\beta_m\sum \theta(t)\,\varphi_m(t)\,\varphi_i(t)=0.$$

Среди них мы наблюдаем такие, у которых значки при φ различны, и одну такую, где значки одинаковы. Но по самому определению функций φ

$$\sum \theta(t)\,\varphi_k(t)\,\varphi_i(t)=0,$$

пока $k \neq i$, а потому имеем

$$\sum \theta(t)\,F(t)\,\varphi_i(t)=\beta_i\sum \theta(t)\,[\varphi_i(t)]^2,$$

откуда

$$\beta_i=\frac{\Sigma\,\theta(t)F(t)\,\varphi_i(t)}{\Sigma\,\theta(t)\,[\varphi_i(t)]^2}. \qquad (3)$$

Рассматривая эту формулу, мы замечаем, что все коэффициенты β вычисляются независимо друг от друга, и поэтому, если бы по какой-либо причине выбранная нами m-я степень функции $F_0(x)$ оказалась недостаточной, то нам пришлось бы только в формуле (1) прибавить новые члены, нисколько не изменяя прежних. Последнее выступает с рельефностью, если мы выпишем подробно выражение нашей целой функции

$$F_0(x)=\varphi_0(x)\frac{\Sigma F\varphi_0\theta}{\Sigma\varphi_0^2\theta}+\varphi_1(x)\frac{\Sigma F\varphi_1\theta}{\Sigma\varphi_1^2\theta}+\ldots+\varphi_m(x)\frac{\Sigma F\varphi_m\theta}{\Sigma\varphi_m^2\theta}.$$

Как видно из этой формулы, с увеличением числа m прибавляется только лишний член, вычисляемый независимо от остальных. В этом и заключается особенное удобство предложенного решения задачи. Самое число m или, другими словами, число членов в формуле (1) мы берём, таким, чтобы $\sum [\lambda(t)]^2 \theta(t)$ была настолько мала, насколько это нам нужно. Если число значений, на которое распространяется сумма, конечное, то число m нельзя увеличивать беспредельно; наибольшее значение m равно числу слагаемых суммы $\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$. Тогда (при конечном числе слагаемых) можно определить функцию $F_0(x)$ так, что для тех значений, которые мы рассматриваем, $\lambda(t) = 0$, т. е.

$$F(t) = F_0(t).$$

При бесконечном же числе слагаемых суммы, а также в случае, если сумма заменена интегралом $\int\limits_a^b \frac{f(t)}{x-t}\,dt$, число m можно увеличивать беспредельно. Тогда получается бесконечный ряд

$$a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \ldots + a_k\varphi_k(t) + \ldots,$$

члены которого выписываются последовательно и который в известном смысле может служить для приближённого вычисления $F(t)$. Но тут выступает вопрос о сходимости этого ряда, о том, будет ли сумма этого ряда в действительности равна $F(t)$, и, наконец, вопрос о погрешности. Вопросов этих мы касаться не будем, так как едва ли их можно трактовать в общем виде.

26. Можно заметить, что функции φ, при помощи которых решена предыдущая задача об отыскании минимума, сами по себе служат также решением задачи о минимуме.

В самом деле, предложим себе найти функцию $\varphi(x)$ степени n с коэффициентом при старшем члене, равным единице так, чтобы $\sum [\varphi(t)]^2 \theta(t)$ была наименьшая. Для решения вопроса представим искомую функцию под видом

$$\varphi(x) = p_0\varphi_0(x) + p_1\varphi_1(x) + \ldots + p_n\varphi_n(x)$$

и составим сумму

$$W_0 = \sum \theta(t)\,[\varphi(t)]^2 =$$
$$= p_0^2 \sum \theta\varphi_0^2 + p_1^2 \sum \theta\varphi_1^2 + \ldots + p_n^2 \sum \theta\,\varphi_n^2 +$$
$$+ 2p_0p_1 \sum \theta\,\varphi_0\varphi_1 + \ldots + 2p_{n-1}p_n \sum \theta\varphi_{n-1}\varphi_n.$$

По определению функций φ имеем $\sum \theta\varphi_i\varphi_k = 0$ $(i \neq k)$. Кроме того, в нашем распоряжении коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, которые мы выберем так, чтобы W_0 принимало наименьшее значение. Очевидно, что следует положить

$$p_0 = p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0,$$

так как $\sum \theta\varphi_i^2 > 0$, а потому

$$\min W_0 = p_n^2 \sum \theta(t)\,[\varphi_n(t)]^2,$$

что и показывает, что искомая функция равна $\varphi(x) = p_n\varphi_n(x)$, выбранной так, чтобы коэффициент при старшем члене был равен, как это стоит в условии, единице.

27. Остановимся теперь на одном частном случае интерполирования функции $F(t)$, когда эта функция определена для всех значений t, на которые распространяется сумма

$$\sum \frac{1}{x-t} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-p}.$$

Сравнивая этот случай с общим (см. n° 25), мы видим, что теперь

$$\theta(t) = 1, \quad t = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

За функцию $\varphi_k(x)$ мы возьмём следующее выражение:

$$\varphi_k(x) = \Delta^k C_k (x-1)(x-2)\ldots$$
$$\ldots(x-k)(x-p-1)(x-p-2)\ldots(x-p-k), \quad (4)$$

где Δ^k есть знак конечной разности порядка k. Постоянную C_k при этом выберем так, чтобы свободный член функции $\varphi_k(x)$ был равен единице, т. е. чтобы $\varphi_k(0) = 1$.

Определение $\varphi_k(0)$ мы выполним с помощью одной из основных формул исчисления конечных разностей:

$$\Delta^i f(x) = f(x+i) - \frac{i}{1} f(x+i-1) + \\ + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2} f(x+i-2) - \ldots + (-1)^i f(x).$$

У нас

$$f(x) = C_k (x-1)(x-2)\ldots \\ \ldots (x-k)(x-p-1)(x-p-2)\ldots(x-p-k) \quad (5)$$

и $i=k$. Составляя последовательно значения $f(x)$, $f(x+1), \ldots, f(x+i)$, мы увидим, что все эти функции, кроме первой, будут иметь один из множителей равным x, вследствие чего

$$f(x+1)\Big|_{x=0} = f(x+2)\Big|_{x=0} = \ldots = f(x+i)\Big|_{x=0} = 0,$$

но

$$f(0) = (-1)^k C_k 1\cdot 2\cdot 3 \ldots k(p+1)(p+2)\ldots(p+k).$$

Отсюда

$$1 = \varphi_k(0) = \\ = (-1)^k C_k 1\cdot 2\cdot 3 \ldots k(p+1)(p+2)\ldots(p+k)$$

и

$$C_k = \frac{(-1)^k}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k\cdot(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}. \quad (6)$$

Введя в рассмотрение вышеуказанную функцию $\varphi_k(x)$ при помощи равенства (4), мы имели в виду выбрать функцию, подобную тем, которые и раньше у нас обозначались этим знаком и которые определяются условием (*). Поэтому мы прежде всего должны убедиться, что взятая нами функция $\varphi_k(x)$ удовлетворяет этому основному условию, т. е. что

$$\sum \omega(t)\varphi_k(t) = 0$$

для всякой целой функции $\omega(t)$ степени не выше $k-1$. С этой целью воспользуемся формулой суммирования по частям

$$\sum_{1}^{p+1} v(t)\,\Delta u(t) =$$
$$= v(p+1)\,u(p+1) - v(1)\,u(1) - \sum_{1}^{p+1} u(t+1)\,\Delta v(t),$$

которую и применим, полагая $u(x) = f(x)$ [см. формулу (5)]. Обозначение пределов суммирования таково, что

$$\sum_{1}^{p+1} K(t) = K(1) + K(2) + \ldots + K(p).$$

Так как $u(p+1) = f(p+1) = 0$ и $u(1) = f(1) = 0$, то для взятой нами функции $u(x)$

$$\sum_{1}^{p+1} v(t)\,\Delta u(t) = -\sum_{1}^{p+1} u(t+1)\,\Delta v(t).$$

Применяя последнюю формулу последовательно k раз, получим:

$$\sum_{1}^{p+1} v(t)\,\Delta^k u(t) = (-1)^k \sum_{1}^{p+1} u(t+k)\,\Delta^k v(t).$$

Так как

$$\Delta^k u(t) = \varphi_k(t),$$

то

$$\sum_{1}^{p+1} v(t)\,\varphi_k(t) = (-1)^k C_k \sum_{1}^{p+1} (t+k-1)(t+k-2)\ldots$$
$$\ldots(t+k-k)(t+k-p-1)\ldots$$
$$\ldots(t+k-p-k)\,\Delta^k v(t)$$

или

$$\sum_{1}^{p+1} v(t)\,\varphi_k(t) = C_k \sum_{1}^{p+1} t(t+1)\ldots$$
$$\ldots(t+k-1)(p-t)(p-t-1)\ldots$$
$$\ldots(p-t-k+1)\Delta^k v(t). \quad (7)$$

Функция $v(t)$ пока какая угодно; если же за $v(t)$ мы выберем некоторую целую функцию степени не выше $k-1$, то $\Delta^k v(t)$ обратится в нуль, и мы получим:

$$\sum_1^{p+1} v(t)\,\varphi_k(t) = 0.$$

Таким образом, взятая нами функция $\varphi_k(x)$, действительно, удовлетворяет основному условию (*).

Формулу (7) можно несколько упростить, уменьшив пределы суммирования. Действительно, ввиду того, что члены суммы

$$\sum_1^{p+1} v(t)\,\varphi_k(t)$$

для значений $t = p, p-1, \ldots, p-k+1$ обращаются в нуль, так как $\varphi_k(p) = \varphi_k(p-1) = \ldots = \varphi_k(p-k+1) = 0$, в чём нетрудно убедиться, то последняя сумма может быть заменена подобной же, но с более тесными пределами; а именно,

$$\sum_1^{p+1} v(t)\,\varphi_k(t) = \sum_1^{p-k+1} v(t)\,\varphi_k(t).$$

Таким образом формулу (7) можно написать так:

$$\sum_1^{p+1} v(t)\,\varphi_k(t) = C_k \sum_1^{p-k+1} t(t+1)\ldots(t+k-1)(p-t)\times$$
$$\times(p-t-1)\ldots(p-t-k+1)\,\Delta^k v(t).$$

На том же основании

$$\sum_1^{p+1} \varphi_k^2(t) =$$
$$= C_k \sum_1^{p-k+1} t(t+1)\ldots(t+k-1)(p-t)(p-t-1)\ldots$$
$$\ldots(p-t-k+1)\,\Delta^k\varphi_k(t),$$

и так как $\varphi_k(t)$ — функция степени k, то

$$\Delta^k\varphi_k(t) = \Delta^{2k} f(t) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2k\cdot C_k,$$

а потому

$$\sum_{1}^{p+1} \varphi_k^2(t) = C_k^2\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k \sum_{1}^{p-k+1} t(t+1)\ldots(t+k-1)\ldots$$
$$\ldots(p-t)\ldots(p-t-k+1).$$

Заменяя в этой последней формуле произведение

$$t(t+1)\ldots(t+k-1)$$

равным ему выражением

$$\frac{\Delta^k(t-k)(t-k+1)\ldots(t-1)\,t(t+1)\ldots(t+k-1)}{(k+1)(k+2)\ldots 2k}$$

и суммируя по частям, найдём:

$$\sum_{1}^{p-k+1} \varphi_k^2(t) = \frac{p(p-1)\ldots(p-k)}{(2k+1)(p+1)\ldots(p+k)}.$$

28. В n° 24 были выведены формулы

$$\varphi_n(x) = (a_n x + b_n)\varphi_{n-1}(x) + c_n\varphi_{n-2}(x),$$
$$\psi_n(x) = (a_n x + b_n)\psi_{n-1}(x) + c_n\psi_{n-2}(x),$$

дающие возможность последовательно вычислять функции φ и ψ, если известны величины соответствующих коэффициентов a, b, c.

Выведем теперь формулы, по которым можно было бы вычислять эти коэффициенты. Для полной определённости функций φ и ψ мы установим, что для всякого n $a_n = 1$ и что $\varphi_0(x) = 1$, а $\varphi_1(x) = x + c_1$. Введём те же почти обозначения, какие делает и Чебышев (см. «Об интерполировании по способу наименьших квадратов»), а именно:

$$\sum \theta(t)\varphi_k(t)t^l = [k, l].$$

Известно, что для всякого k эта сумма равна нулю, пока $l < k$, так что $[k, 0] = [k, 1] = \ldots = [k, k-1] = 0$. Что же касается символа $[k, k]$, то нетрудно показать, что он больше нуля. В самом деле,

$$[k, k] = \sum \theta(t)\varphi_k(t)t^k,$$

и так как $\varphi_k(x) = x^k$ плюс целая функция степени ниже k, то $x^k = \varphi_k(x) + \omega(x)$, где $\omega(x)$ степени не выше $k-1$.

Поэтому

$$[k, k] = \sum \theta(t)\,\varphi_k^2(t) + \sum \theta(t)\,\varphi_k(t)\,\omega(t).$$

По определению функции $\varphi_k(t)$

$$\sum \theta(t)\,\varphi_k(t)\,\omega(t) = 0,$$

откуда и видно, что

$$[k, k] = \sum \theta(t)\,\varphi_k^2(t) > 0.$$

Отметив эти отчасти уже известные свойства символа, перейдём к самому вопросу и начнём с вычисления коэффициента c_n. Для этого возьмём соотношение

$$\varphi_n(t) = (t + b_n)\,\varphi_{n-1}(t) + c_n\,\varphi_{n-2}(t),$$

умножим обе части его на $t^l\theta(t)$ и просуммируем. Тогда получаем:

$$\sum t^l \varphi_n(t)\,\theta(t) = \sum t^{l+1} \varphi_{n-1}(t)\,\theta(t) + \\ + \sum b_n t^l \varphi_{n-1}(t)\,\theta(t) + \sum c_n t^l \varphi_{n-2}(t)\,\theta(t).$$

Сообразно с принятым обозначением, последнее равенство напишется так:

$$[n, l] = [n-1, l+1] + b_n\,[n-1, l] + c_n\,[n-2, l].$$

Дадим в этой формуле числу l такое значение, чтобы множитель при b_n обратился в нуль, а при c_n не был равен нулю. Это будет, когда возьмём

$$l < n-1, \text{ но не } < n-2.$$

Полагая $l = n-2$, имеем

$$0 = [n-1, n-1] + c_n\,[n-2, n-2],$$

откуда

$$c_n = -\frac{[n-1, n-1]}{[n-2, n-2]} = -\frac{\sum \theta(t)\,\varphi_{n-1}^2(t)}{\sum \theta(t)\,\varphi_{n-2}^2(t)}.$$

Эта формула обнаруживает, между прочим, что $c_n < 0$. Для определения b_n можно дать числу l значение $n-1$. Тогда при предположении, что c_n уже известно, найдём из уравнения

$$0 = [n-1, n] + b_n [n-1, n-1] + c_n [n-2, n-1]$$

значение

$$b_n = \frac{[n-2, n-1]}{[n-2, n-2]} - \frac{[n-1, n]}{[n-1, n-1]}.$$

Но можно вывести другую формулу для определения b_n, не зависящую от того, известно или нет соответствующее c_n. Для этого помножим обе части основного соотношения между тремя последовательными функциями φ на произведение $\varphi_{n-1}(t)\,\theta(t)$ и просуммируем. Тогда получим:

$$\sum \varphi_n \varphi_{n-1}\,\theta =$$
$$= \sum t\varphi_{n-1}^2\,\theta + b_n \sum \varphi_{n-1}^2\,\theta + c_n \sum \varphi_{n-2}\varphi_{n-1}\,\theta.$$

Так как

$$\sum \varphi_n \varphi_{n-1}\,\theta = 0$$

и

$$\sum \varphi_{n-2}\varphi_{n-1}\,\theta = 0,$$

то

$$b_n = -\frac{\sum t\varphi_{n-1}^2(t)\,\theta(t)}{\sum \varphi_{n-1}^2(t)\,\theta(t)}.$$

Из этой формулы, между прочим, можно извлечь такой вывод. Так как $\varphi_{n-1}^2(t)\,\theta(t)$ в пределах суммирования сохраняет постоянно один и тот же знак, то

$$\sum t\varphi_{n-1}^2(t)\,\theta(t) = \tau \sum \varphi_{n-1}^2(t)\,\theta(t),$$

где τ — число, лежащее в пределах суммирования $a \ldots b$; поэтому

$$b_n = -\tau,$$

т. е. $-b_n$ равно некоторому среднему значению τ между a и b. Так что, например, если $a = 0$ и $b > 0$, то заключаем, что $b_n < 0$.

VI. Приближённое вычисление определённых интегралов

29. До сих пор мы рассматривали вопросы, имеющие связь лишь со знаменателями подходящих дробей суммы $\sum \frac{\theta(t)}{x-t}$ или интеграла $\int\limits_c^d \frac{f(t)}{x-t}\,dt$. Перейдём теперь к таким рассуждениям, где играют роль и числители этих дробей, именно к приближённому вычислению интегралов или сумм. Понятно, что при приближённом вычислении сумм важно, чтобы число слагаемых было велико, так как в противном случае не стоило бы и прибегать к приближённому вычислению.

Отметим сначала существование формулы для приближённого выражения функции $F(x)$ по её значениям

$$F(a_1),\ F(a_2),\ \ldots,\ F(a_i),\ F(a_{i+1}),\ \ldots,\ F(a_{i+j})$$

и по значениям её производной

$$F'(a_1),\ F'(a_2),\ \ldots,\ F'(a_i),$$

где $j \geqslant 0$, так что число членов во втором ряду не больше числа членов первого, и каждому члену второго ряда соответствует член первого.

Выразим функцию $F(x)$ приближённо через целую функцію $\Phi(x)$, которую возьмём возможно низшей степени и притом так, чтобы

$$\Phi(a_l) = F(a_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots, i+j), \tag{1}$$

$$\Phi'(a_m) = F'(a_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, i). \tag{2}$$

Эту функцию составим постепенно. Сначала по формуле Лагранжа составим целую функцию $\Phi_0(x)$ наинизшей степени, удовлетворяющую лишь условиям (1); она будет такова:

$$\Phi_0(x) = \sum F(a_l)\frac{g(x)}{(x-a_l)\,g'(a_l)}, \tag{3}$$

где $g(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i+j})$; а затем уже искомую функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющую обоим условиям;

её в общем виде можем представить так:

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + g(x)\Psi(x). \tag{4}$$

Здесь $\Psi(x)$ — пока ещё неизвестная целая функция, которую и надо нам подобрать так, чтобы функция $\Phi(x)$, удовлетворяющая, как это видно из её выражения, условиям (1), удовлетворила также и условиям (2).

Берём производную от обеих частей равенства (4)

$$\Phi'(x) = \Phi_0'(x) + g(x)\Psi'(x) + g'(x)\Psi(x).$$

Чтобы удовлетворить условию (2), надо, чтобы

$$\Phi'(a_m) = F'(a_m) = \Phi_0'(a_m) + g'(a_m)\Psi(a_m),$$

откуда и определяется значение $\Psi(a_m)$:

$$\Psi(a_m) = \frac{F'(a_m) - \Phi_0'(a_m)}{g'(a_m)},$$

а затем опять по формуле Лагранжа, зная значения функции $\Psi(x)$ для $x = a_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots, i)$, определим и самую функцию $\Psi(x)$.

Таким образом, формула (4) представит выражение искомой функции $\Phi(x)$, удовлетворяющей всем поставленным условиям. Она оказывается степени $2i + j - 1$, так как $\Phi_0(x)$ степени $i + j - 1$, $g(x)$ степени $i + j$, а $\Psi(x)$ степени $i - 1$. Кроме того, следует заметить, что $\Phi_0(x)$ линейным образом содержит различные значения функции $F(x)$, а $\Psi(x)$ — линейная относительно $F(a_l)$ и $F'(a_m)$. Таким образом, $\Phi(x)$ можно представить так:

$$\Phi(x) = X_1 F(a_1) + \ldots + X_{i+j} F(a_{i+j}) + \\ + Y_1 F'(a_1) + \ldots + Y_i F'(a_i), \tag{5}$$

где X_l и Y_m — целые функции, которые нетрудно составить, но которые нам нет надобности выписывать. Полезно лишь заметить, что Y_m содержит $g(x)$ множителем, так что $Y_m = g(x) Z_m$, где $Z_m = P_m \dfrac{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_i)}{x - a_m}$, в чём нетрудно убедиться.

30. Перейдём к самой задаче приближённого вычисления интегралов. Возьмём интеграл

$$\int_c^d F(x) f(x)\, dx,$$

где под $f(x)$ будем предполагать функцию, не меняющую своего знака плюс в (конечном) промежутке (c, d). Заменив функцию $F(x)$ приближённо целой функцией $\Phi(x)$, определённой как указано выше, и обозначив поправку, которую при этом мы должны ввести, через $R(x)$, получим:

$$\int_c^d F(x) f(x)\, dx = \int_c^d \Phi(x) f(x)\, dx + \int_c^d R(x) f(x)\, dx.$$

Пользуясь формулой (5), мы находим:

$$\int_c^d F(x) f(x)\, dx = \sum_{l=1}^{l=i+j} F(a_l) \int_c^d X_l f(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=i} F'(a_m) \int_c^d Y_m f(x)\, dx + \int_c^d R(x) f(x)\, dx. \quad (6)$$

Если величина интеграла $\int_c^d R(x)\, f(x)\, dx$ настолько мала, что ей можно пренебречь, то тогда из формулы (6) мы получим приближённое выражение определённого интеграла

$$\int_c^d F(x) f(x)\, dx = \sum_{l=1}^{l=i+j} A_l F(a_l) + \sum_{m=1}^{m=i} B_m F'(a_m) \quad (7)$$

в виде суммы конечного числа слагаемых, линейным образом содержащих $F(a_l)$ и $F'(a_m)$.

Коэффициентами A_l и B_m этой формулы служат интегралы

$$A_l = \int\limits_c^\partial X_l f(x)\,dx \quad \text{и} \quad B_m = \int\limits_c^\partial Y_m f(x)\,dx,$$

вовсе не зависящие от функции $F(x)$. Для более удобного их вычисления позднее будут выведены соответствующие формулы. Ошибка приближённого равенства (7), выражаемая интегралом

$$\int\limits_c^\partial R(x) f(x)\,dx,$$

где $R(x) = F(x) - \Phi(x)$, может быть представлена в иной форме. Для получения этого выражения рассмотрим функцию

$$\Omega(x) = F(x) - \Phi(x) - Kg(x)(x-a_1)(x-a_2)\ldots$$
$$\ldots(x-a_i),$$

где K — некоторое постоянное число, пока ещё неопределённое. Это число K определим так, чтобы $\Omega(x)$ обратилась в нуль при некотором значении x_0, отличном от $a_1, a_2, \ldots, a_{i+j}$. Тогда у $\Omega(x)$ будет $i+j+1$ нулей, а именно: $a_1, a_2, \ldots, a_{i+j}, x_0$. По теореме Ролля $\Omega'(x)$ имеет по крайней мере $i+j$ нулей, ни один из которых не совпадает с $a_1, a_2, \ldots, a_{i+j}, x_0$. Но по построению $\Omega'(x)$ обращается в нуль при $x = a_1, a_2, \ldots, a_i$. Значит, $\Omega'(x)$ имеет по крайней мере $2i+j$ нулей. Поэтому $\Omega''(x)$ имеет по крайней мере $2i+j-1$ нулей, $\Omega'''(x)$ — $2i+j-2$ нулей и т. д. и, наконец, $\Omega^{(2i+j)}(x)$ имеет по крайней мере один нуль, который мы обозначим через ξ. А так как

$$\Omega^{(2i+j)}(x) = F^{(2i+j)}(x) - 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+j)\,K,$$

то

$$K = \frac{F^{(2i+j)}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+j)},$$

где ξ зависит от x_0 и лежит в промежутке (c, ∂), если в этом промежутке лежало x_0 и все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{i+j}$.

Но x_0 определено у нас так, чтобы $\Omega(x_0)=0$, т. е.

$$0=F(x_0)-\Phi(x_0)-Kg(x_0)(x_0-a_1)(x_0-a_2)\ldots\ldots(x_0-a_i).$$

Поэтому для любого числа x_0, лежащего между c и ∂, имеем:

$$0=R(x_0)-\frac{F^{(2i+j)}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+j)}\times\times g(x_0)(x_0-a_1)(x_0-a_1)\ldots(x_0-a_i).$$

Ничто не мешает произвольно выбранное нами число x_0 заменить на x; тогда получаем:

$$R(x)=F(x)-\Phi(x)=$$
$$=\frac{F^{(2i+j)}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+j)}g(x)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i).$$

Таким образом, поправка приближённой формулы (7) может быть представлена так:

$$\rho=\int_c^\partial R(x)f(x)\,dx=\int_c^\partial\frac{F^{(2i+j)}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+j)}\times\times g(x)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i)f(x)\,dx. \quad (8)$$

Из неё, между прочим, следует, что если $F(x)$ будет целой функцией степени не выше $2i+j-1$, то формула (7) даёт точное выражение интеграла, так как тогда $F^{(2i+j)}(x)=0$ тождественно.

Зная выражение поправки к формуле (7), мы можем получить и формулы для определения коэффициентов A_l и B_m. Как замечено раньше, величины этих коэффициентов не зависят от функции $F(x)$ и потому имеют одно и то же значение при любой функции $F(x)$. Для вычисления коэффициента B_m выберем функцию $F(x)$ так, чтобы она была возможно низшей степени и притом чтобы $F(a_l)=0$ при всяком $l=1, 2, 3, \ldots, i+j$, а $F'(a_m)=0$ при всяком $m=1, 2, 3, \ldots, i$, за исключением одного из чисел этого ряда. Этим условиям, очевидно, удовлетворит функция

$$F(x)=\frac{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_i)^2(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{i+j})}{x-a_m}.$$

Тогда в формуле (7) пропадут все члены, кроме $B_mF'(a_m)$. Дополнительный член также будет равен нулю по замеченному выше, так как $F(x)$ — целая функция степени $2i+j-1$. Поэтому

$$\int\limits_c^d \frac{(x-a_1)^2\ldots(x-a_i)^2(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{i+j})}{x-a_m}f(x)\,dx=$$
$$=B_mF'(a_m),$$

и, вводя снова обозначение

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i+j}),$$

можем написать

$$\int\limits_c^d \frac{g(x)(x-a_1)\ldots(x-a_i)}{x-a_m}f(x)\,dx=B_mF'(a_m), \tag{9}$$

где

$$F'(a_m)=(a_m-a_1)^2(a_m-a_2)^2\ldots(a_m-a_{m-1})^2\times$$
$$\times(a_m-a_{m+1})^2\ldots(a_m-a_i)^2(a_m-a_{i+1})(a_m-a_{i+2})\ldots$$
$$\ldots(a_m-a_{i+j}).$$

Формула (9) даёт величину коэффициентов B_m. Вычисление коэффициентов A_l сложнее, пока в формуле (7) имеются члены, содержащие производные $F'(a_m)$. Однако и для них можно получить соответствующее выражение, если мы, предполагая коэффициенты B_m уже найденными, в формуле (7) возьмём за $F(x)$ целую функцию степени $<2i+j$, которая равна нулю для всех значений a_l, кроме одного.

Замечание. Найденный способ приближённого вычисления определённого интеграла по формуле (7) представляет так называемый способ касательных парабол. В нём кривая, определяемая уравнением $y=F(x)$, заменяется параболой $y = \Phi(x)$, имеющей с кривой $i + j$ общих точек и в i из этих точек общие касательные.

31. Возвращаясь снова к рассмотрению дополнительного члена (8), остановимся на трёх частных случаях, которые впоследствии нас особенно будут интересовать. Эти частные случаи соответствуют трём предположениям:

1) $j = 0$,

2) $j = 2$, причём $a_{i+1} = c$, $a_{i+2} = \partial$,

3) $j = 1$, » $a_{i+1} = c$ или $= \partial$.

Мы будем предполагать, что рассматриваемая функция $F(x)$ такова, что $F^{(2i+j)}(x)$ сохраняет один и тот же знак в промежутке интегрирования (c, ∂). Этим же обусловливается и выбор значений a_{i+1} и a_{i+2}, взятых на границах промежутка интегрирования, так как тогда произведение

$$g(x)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_i)$$

будет сохранять свой знак в промежутке интегрирования.

1-й случай: $j = 0$.

По формуле (8) имеем:

$$\rho_1 = \int^{\partial} \frac{F^{(2i)}(\xi)[g(x)]^2}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2i} f(x)\,dx =$$

$$= F^{(2i)}(\eta) \int_c^{\partial} \frac{[g(x)]^2 f(x)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2i} dx. \qquad (8')$$

Мы видим, что в зависимости от знака $F^{(2i)}(x)$ дополнительный член будет больше или меньше нуля.

2-й случай: $j = 2$, $a_{i+1} = c$, $a_{i+2} = \partial$.

Тогда

$$\rho_2 = \int_c^{\partial} \frac{F^{(2i+2)}(\xi)[g(x)]^2 f(x)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+2)(x-c)(x-\partial)} dx =$$

$$= F^{(2i+2)}(\eta) \int_c^{\partial} \frac{[g(x)]^2 f(x)\,dx}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+2)(x-c)(x-\partial)}. \qquad (8'')$$

Сопоставим погрешность для этого частного случая с погрешностью для предыдущего, что, как сейчас выяснится, весьма выгодно для оценки погрешности вычисления. Для этого уравняем порядки производных в выражениях ρ_1 и ρ_2, именно в 1-м случае возьмём $i=n$, а во 2-м $i=n-1$. Тогда величины дополнительных членов будут:

$$\rho_1 = F^{(2n)}(\eta_1)\int_c^{\partial}\frac{[g(x)]^2 f(x)\,dx}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n} \quad \text{в 1-м случае,}$$

$$\rho_2 = F^{(2n)}(\eta_2)\int_c^{\partial}\frac{[g(x)]^2 f(x)\,dx}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n\,(x-c)(x-\partial)} \quad \text{во 2-м случае.}$$

Сравнивая их, мы видим, что под знаком одного из интегралов имеется произведение $(x-c)(x-\partial)$, которое меньше нуля для всех значений x в промежутке между c и ∂. Поэтому ρ_1 и ρ_2 — противоположных знаков, т. е. в одном случае мы получаем приближённое значение определённого интеграла по избытку, а в другом по недостатку. Это обстоятельство весьма важно, так как позволяет оценивать погрешность вычисления, не пользуясь дополнительным членом.

3-й случай: $j=1$, $a_{i+1}=c$ или $=\partial$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned}
\rho_3' &= F^{(2i+1)}(\eta')\int_c^{\partial}\frac{[g(x)]^2 f(x)\,dx}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+1)(x-c)}\\
&\qquad\text{при } a_{i+1}=c,\\
\rho_3'' &= F^{(2i+1)}(\eta'')\int_c^{\partial}\frac{[g(x)]^2 f(x)\,dx}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+1)(x-\partial)}\\
&\qquad\text{при } a_{i+1}=\partial.
\end{aligned}\right\} \qquad (8''')$$

Эти два выражения погрешности разных знаков между собой, так как $x-c>0$, а $x-\partial<0$ в пределах интегрирования; поэтому, взяв в одном случае $a_{i+1}=c$, а в другом $a_{i+1}=\partial$, мы получим два приближённых значения интеграла, из которых опять одно будет больше, а другое меньше истинного.

32. До сих пор при рассмотрении общей задачи о вычислении определённого интеграла мы ничего не предполагали относительно выбранных нами значений

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_{i+j}.$$

Желая теперь остановиться на одном частном случае формулы (7), ограничим эти значения некоторым условием. Именно, подберём числа a_1, a_2, ..., a_i так, чтобы члены, содержащие производные $F'(a_m)$, пропали. Это будет в том случае, если

$$B_m=\int_c^\partial Y_m f(x)\,dx=0$$

для всякого $m=1, 2, 3, \ldots, i$.

Как уже замечено в конце n° 28,

$$Y_m=g(x)\,Z_m=P_m\,g(x)\,\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i)}{x-a_m}.$$

Поэтому предыдущеее условие напишется так:

$$\int_c^\partial g(x)\,\frac{(x-a_1)(x-a_2)\,(x-a_i)}{x-a_m}\,f(x)\,dx=0$$

для всякого $m=1, 2, 3, \ldots, i$, т. е. должно иметь место равенство

$$\int_c^\partial f(x)\,g(x)\,\omega(x)\,dx=0 \qquad (10)$$

для всякой целой функции $\omega(x)$ степени $i-1$. Нетрудно убедиться в справедливости и обратного предложения: если последнее условие выполнено, то формула (7) не содержит членов $B_m\,F'(a_m)$. Таким образом в рассматриваемом частном случае мы имеем более простую формулу для вычисления определённого интеграла

$$\int_c^\partial F(x)\,f(x)\,dx = \sum_{l=1}^{l=i+j} A_l\,F(a_l) + \rho, \qquad (11)$$

где

$$\rho = \int_c^\partial \frac{F^{(2i+j)}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2i+j)}\,g(x)\,(x-a_1)\ldots(x-a_i)\,f(x)\,dx. \qquad (8)$$

33. Покажем теперь, что таким образом поставленная задача связана с рассмотрением подходящих дробей для разложения интеграла

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt$$

в непрерывную дробь. Рассмотрим отдельно опять те же три частных предположения:

$$\begin{aligned} &j=0;\\ &j=2, \quad a_{i+1}=c, \quad a_{i+2}=\partial;\\ &j=1, \quad a_{i+1}=c \ \text{ или } \ =\partial. \end{aligned}$$

I. $j=0$.

Заменив i через n и замечая, что степень функции $g(x)$ равна n, мы находим, что условие (10)

$$\int_c^\partial f(t)\,g(t)\,\omega(t)\,dt = 0 \qquad (10)$$

для всякой целой функции $\omega(t)$ степени $n-1$ есть то самое условие, которое определяет знаменатель степени n подходящей дроби для интеграла

$$\int \frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

А это приводит нас к заключению, что $g(x)$ отличается от $\varphi_n(x)$ лишь на постоянный множитель; считая его равным единице, имеем:

$$g(x)=\varphi_n(x). \tag{12}$$

Найденный результат показывает, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определяются как корни уравнения

$$\varphi_n(x)=0.$$

Корни этого уравнения, как было раньше доказано, простые, вещественные и заключаются в промежутке (a, b).

II. $j=2, \quad a_{i+1}=c, \quad a_{i+2}=\partial.$

В этом случае также можно установить связь между $g(x)$ и знаменателями подходящих дробей для $\int\limits_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt$, хотя и не такую простую, как в случае, сейчас рассмотренном. Возьмём $i=n-1$; тогда

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i)(x-c)(x-\partial)$$

будет степени $n+1$, а $\omega(x)$ — входящая в условие (10), — степени $n-2$.

Прежде всего убедимся, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_n(c) & \varphi_{n-1}(c) \\ \varphi_n(\partial) & \varphi_{n-1}(\partial) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, в противном случае можно было бы найти отличные от нуля числа K, L так, чтобы

$$K\varphi_n(c)+L\varphi_{n-1}(c)=0,$$
$$K\varphi_n(\partial)+L\varphi_{n-1}(\partial)=0$$

и, следовательно, целая функция

$$h(x)=K\varphi_n(x)+L\varphi_{n-1}(x),$$

не равная нулю тождественно, имела бы нули $x=c$, $x=\partial$. Между c и ∂ она могла бы иметь самое большее $n-2$ нуля. Пусть это будут числа

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_\lambda \quad (\lambda \leqslant n-2).$$

Тогда

$$\int\limits_c^\partial f(t)\, h(t)(t-b_1)(t-b_2)\ldots(t-b_\lambda)\, dt =$$

$$= K\int\limits_c^\partial f(t)\,\varphi_n(t)\,(t-b_1)\ldots(t-b_\lambda)\,dt +$$

$$+ L\int\limits_c^\partial f(t)\,\varphi_{n-1}(t)\,(t-b_1)\ldots(t-b_\lambda)\,dt$$

должен равняться нулю, что невозможно, поскольку функция

$$f(t)\, h(t)\,(t-b_1)\,(t-b_2)\ldots(t-b_\lambda)$$

не меняет знака в промежутке $(c,\ \partial)$.

Итак,

$$\begin{vmatrix} \varphi_n(c) & \varphi_{n-1}(c) \\ \varphi_n(\partial) & \varphi_{n-1}(\partial) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теперь легко видеть, что

$$g(x) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{n+1}(x) & \varphi_n(x) & \varphi_{n-1}(x) \\ \varphi_{n+1}(c) & \varphi_n(c) & \varphi_{n-1}(c) \\ \varphi_{n-1}(\partial) & \varphi_n(\partial) & \varphi_{n-1}(\partial) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_n(c) & \varphi_{n-1}(c) \\ \varphi_n(\partial) & \varphi_{n-1}(\partial) \end{vmatrix}}$$

есть искомая функция. Действительно, она имеет вид

$$g(x) = \varphi_{n+1}(x) + A\,\varphi_n(x) + B\,\varphi_{n-1}(x),$$

а потому удовлетворяет условию (10). Кроме того, она обращается в нуль при $x=c$ и $x=\partial$. Наконец, в силу (10) все остальные нули функции $g(x)$ обязательно простые и лежат внутри промежутка (c, ∂). В самом деле, если бы функция $g(x)$ меняла свой знак $\lambda < n-2$ раз в промежутке (c, ∂), кажем, при значениях

$$a_1, a_2, \ldots, a_\lambda,$$

о произведение

$$f(x) g(x)(x-a_1) \ldots (x-a_\lambda)$$

не меняло бы знака в этом промежутке, что противоречило бы равенству

$$\int_c^\partial f(t) g(t)(t-a_1) \ldots (t-a_\lambda)\, dt = 0.$$

III. $f=1$, $a_{i+1}=c$ или $=\partial$.

Чтобы не различать отдельно случаев $a_{i+1}=c$ или $a_{i+1}=\partial$, положим $a_{i+1}=a$, где $a=c$ или $=\partial$. Число i возьмём равным n.

Для данного случая $g(x)$ требуется определить из условий: $\int_c^\partial f(t) g(t) \omega(t)\, dt = 0$ для любой функции $\omega(x)$ степени $n-1$ и $g(a)=0$. Легко видеть, что

$$g(x) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{n+1}(x) & \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(a) & \varphi_n(a) \end{vmatrix}}{\varphi_n(a)}.$$

Здесь нужно принять во внимание, что $\varphi_n(a) \neq 0$, так как все нули $\varphi_n(x)$ лежат между c и ∂.

Действительно, функция $g(x)$ удовлетворяет условию (10) и имеет n нулей внутри промежутка (c, ∂). Последнее доказывается так же, как и аналогичное свойство в предыдущем случае.

34. Для полноты решения задачи нам остаётся показать, как можно вычислить коэффициенты A_l формулы

$$\int_c^\partial F(t) f(t)\, dt = \sum A_l F(a_l) + \rho, \tag{11}$$

где ρ, соответственно случаям $j=0$, $j=2$, $j=1$, вычисляется по формулам

$$\rho_1 = F^{(2n)}(\xi)\int\limits_c^{\partial}\frac{[g(t)]^2 f(t)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}\,dt, \tag{8'}$$

$$\rho_2 = F^{(2n)}(\xi)\int\limits_c^{\partial}\frac{[g(t)]^2 f(t)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n\,(t-c)(t-\partial)}\,dt, \tag{8''}$$

$$\rho_3 = F^{(2n+1)}(\xi)\int\limits_c^{\partial}\frac{[g(t)]^2 f(t)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots (2n+1)(t-a)}\,dt, \tag{8'''}$$

обнаруживающим, что $\rho = 0$ для всякой целой функции степени не выше $2n-1$ или $2n$.

Чтобы получить формулу для вычисления коэффициентов A_l, поступим так же, как и раньше при составлении формул для вычисления коэффициентов B_m (n°31). Именно, зная, что величина коэффициентов A_l не зависит от вида функции $F(x)$, возьмём

$$F(x) = \frac{g(x)}{x-a_l}.$$

Тогда в формуле (11) дополнительный член обратится в нуль, все члены также обратятся в нуль, за исключением одного: $A_l F(a_l)$. Поэтому получим:

$$\int\limits_c \frac{g(t)}{t-a_l} f(t)\,dt = A_l F(a_l) = A_l g'(a_l),$$

откуда

$$A_l = \int\limits_c^{\partial}\frac{g(t)}{(t-a_l)\,g'(a_l)} f(t)\,dt.$$

Величину коэффициента A_l можно выразить ещё проще, если мы введём в рассмотрение числители подходящих для

$$\int\limits_c^{\partial}\frac{f(t)}{x-t}\,dt$$

дробей. В самом деле,

$$A_l = \int_c^d \frac{g(a_l)-g(t)}{g'(a_l)(a_l-t)} f(t)\,dt = \frac{1}{g'(a_l)} \int_c^d \frac{g(a_l)-g(t)}{a_l-t} f(t)\,dt.$$

Вспоминая же формулу (**) n° 23, определяющую числители подходящих дробей $\psi(x)$, имеем:

1) для случая $j=0$

$$g(x) = \varphi_n(x),$$

$$A_l = \frac{1}{\varphi_n'(a_l)} \int_c^d \frac{\varphi_n(a_l)-\varphi_n(t)}{a_l-t} f(t)\,dt = \frac{\psi_n(a_l)}{\varphi_n'(a_l)}; \tag{13}$$

2) для случая $j=2$

$$g(x) = \varphi_{n+1}(x) + A\varphi_n(x) + B\varphi_{n-1}(x),$$

поэтому

$$A_l = \frac{\psi_{n+1}(a_l) + A\psi_n(a_l) + B\psi_{n-1}(a_l)}{\varphi_{n+1}'(a_l) + A\varphi_n'(a_l) + B\varphi_{n-1}'(a_l)}; \tag{14}$$

3) для случая $j=1$

$$g(x) = \varphi_{n+1}(x) + N\varphi_n(x)$$

и

$$A_l = \frac{\psi_{n+1}(a_l) + N\psi_n(a_l)}{\varphi_{n+1}'(a_l) + N\varphi_n'(a_l)},$$

где

$$N = -\frac{\varphi_{n+1}(a)}{\varphi_n(a)}. \tag{15}$$

Полученные формулы не дают возможности подметить характерное свойство коэффициентов A_l, состоящее в том, что $A_l > 0$. Но нетрудно взамен формулы (13) получить другую тождественную с ней формулу, обнаруживающую указываемое свойство. Стоит только взамен ранее взятого для $F(x)$ выражения положить

$$F(x) = \left[\frac{\varphi_n(x)}{x-a_l}\right]^2.$$

Оно степени ниже $2n-1$, поэтому $\rho_1=0$. Эта функция обращается в нуль для всех a_λ, кроме одного (a_l), и мы получаем

$$\int_c^\partial f(t)\left[\frac{\varphi_n(t)}{t-a_l}\right]^2 dt = A_l\,[\varphi_n'(a_l)]^2,$$

откуда

$$A_l=\int_c^\partial f(t)\left[\frac{\varphi_n(t)}{(t-a_l)\,\varphi_n'(a_l)}\right]^2 dt>0.$$

35. Применим полученные формулы к случаю, когда

$$F(t)=\frac{1}{x-t},$$

причём, конечно, x предполагается вещественным и лежащим вне промежутка $(c,\ \partial)$. Тогда по формулам (11) и (13) для случая $j=0$ имеем:

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt=\sum\frac{\psi_n(a_l)}{\varphi_n'(a_l)}\,\frac{1}{x-a_l}+\rho'.$$

Но очевидно, что последняя сумма есть не что иное, как результат разложения дроби $\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}$ на простейшие, так что

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt=\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}+\rho'. \tag{16}$$

Таким образом, дробь $\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}$ появилась у нас ещё в новой роли, именно — как приближённое значение определённого интеграла. Погрешность ρ' выражается при этом в виде

$$\rho'=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots2n}{(x-\xi)^{2n+1}}\int_c^\partial \frac{f(t)\,[\varphi_n(t)]^2}{1\cdot2\cdot3\ldots2n}\,dt. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что если x, лежащее, как мы раньше сказали, вне пределов c и ∂, таково, что $x > \partial > c$, то $\rho' > 0$ и дробь $\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}$ представляет приближённое значение интеграла по недостатку; в случае же, если $x < c < \partial$, о, наоборот, $\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}$ — больше интеграла.

Оценку погрешности, которую мы делаем, полагая приближённо

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt = \frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)},$$

мы можем произвести без непосредственного определения того числа, которого не превосходит $|\rho'|$. Для этого у нас имеются другие формулы вычисления определённого интеграла, соответствующие случаю $j = 1$, именно,

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt = \sum A_l \frac{1}{x-a_l} + \rho''',$$

где

$$A_l = \frac{\psi_n(a_l)\,\varphi_{n-1}(a) - \psi_{n-1}(a_l)\,\varphi_n(a)}{\varphi'_n(a_l)\,\varphi_{n-1}(a) - \varphi'_{n-1}(a_l)\,\varphi_n(a)},$$

$$\rho''' = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)}{(x-\xi)^{2n}} \int_c^\partial \frac{f(t)\,[g(t)]^2}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)\,(t-a)}\,dt.$$

За число a в этих формулах выберем тот из пределов c или ∂, при котором погрешность ρ''' выходила бы знака, противоположного той, какая получается из формулы (17). Тогда из сопоставления вычислений по двум формулам мы и получим возможность судить о величине ошибки, так как одно из получаемых таким образом приближённых значений интеграла будет больше, а другое меньше истинного.

Остановимся, например, на случае, когда $x > \partial > c$, т. е. когда $x - \xi > 0$ и, следовательно, $\rho' > 0$. Чтобы при этом ρ''' было < 0, надо, чтобы $t-a$ было < 0, т. е. за a надо взять верхний предел ∂. Тогда получим:

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt < \sum \frac{\psi_n(a_l) - \frac{\varphi_n(\partial)}{\varphi_{n-1}(\partial)}\psi_{n-1}(a_l)}{\varphi_n'(a_l) - \frac{\varphi_n(\partial)}{\varphi_{n-1}(\partial)}\varphi_{n-1}'(a_l)}\,\frac{1}{x-a_l}.$$

Правая часть последнего неравенства, очевидно, представляет результат разложения на простейшие дроби выражения

$$\frac{\psi_n(x)\varphi_{n-1}(\partial) - \psi_{n-1}(x)\varphi_n(\partial)}{\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(\partial) - \varphi_{n-1}(x)\varphi_n(\partial)}.$$

Поэтому

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt < \frac{\varphi_{n-1}(\partial)\psi_n(x) - \varphi_n(\partial)\psi_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(\partial)\varphi_n(x) - \varphi_n(\partial)\varphi_{n-1}(x)}.$$

А ввиду неравенства

$$\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt > \frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}$$

окончательно имеем:

$$\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)} < \int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt < \frac{\varphi_{n-1}(\partial)\psi_n(x) - \varphi_n(\partial)\psi_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(\partial)\varphi_n(x) - \varphi_n(\partial)\varphi_{n-1}(x)}.$$

Подобные же неравенства можно было бы получить для случая, когда $x<c<\partial$; тогда только надо было бы положить $a=c$. В вышеприведённых неравенствах следует лишь изменить знаки на обратные и заменить букву ∂ на c.

Эти неравенства могут служить для доказательства, что, при беспредельном увеличении числа n, дробь $\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}$ стремится к пределу, равному $\int_c^\partial \frac{f(t)}{x-t}\,dt$, если только x не лежит в промежутке между c и ∂.

24 Зак. 1254. А. А. Марков.

36. Остановимся теперь на том случае, который рассматривал Гаусс; тогда мы и придём к его способу приближённого вычисления определённых интегралов. Именно положим, что $f(t) = 1$.

Тогда полученная ранее формула (11) приведётся к

$$\int_c^\partial F(t)\,dt = \sum A_l F(a_l) + \rho,$$

где числа a_l суть корни функции $\varphi_n(x)$, определяемой условием

$$\int_c^\partial \varphi_n(t)\,\omega(t)\,dt = 0 \qquad (*)$$

для всякой целой функции $\omega(t)$ степени $n-1$. Пользуясь этим условием, можно получить дифференциальное уравнение 2-го порядка для нахождения $\varphi_n(x)$.

В самом деле, возьмём произведение

$$(x-c)(x-\partial)\,\varphi_n'(x).$$

Его производная

$$\frac{d(x-c)(x-\partial)\,\varphi_n'(x)}{dx},$$

как видно, есть целая функция той же степени, как и $\varphi_n(x)$. Помножив эту производную на $\omega(x)$, составим интеграл

$$\int_c^\partial \frac{d(t-c)(t-\partial)\,\varphi_n'(t)}{dt}\,\omega(t)\,dt.$$

Применяя к последнему интегрирование по частям, получим:

$$\left[\omega(t)(t-c)(t-\partial)\varphi_n'(t)\right]_c^\partial - \int_c^\partial \omega'(t)(t-c)(t-\partial)\varphi_n'(t)\,dt =$$

$$= -\left[\varphi_n(t)(t-c)(t-\partial)\,\omega'(t)\right]_c^\partial +$$

$$+ \int_c^\partial \varphi_n(t)\,\frac{d(t-c)(t-\partial)\,\omega'(t)}{dt}\,dt,$$

так что

$$\int_c^\partial \frac{d(t-c)(t-\partial)\varphi_n'(t)}{dt}\,\omega(t)\,dt =$$

$$= \int_c^\partial \frac{d(t-c)(t-\partial)\,\omega'(t)}{dt}\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Равенство это относится ко всяким функциям φ_n, ω, лишь бы каждая в отдельности часть его имела смысл. Применяя же последнее равенство именно к функциям φ_n, определяемым известным нам условием, мы замечаем, что его правая часть равна нулю, так как

$$\frac{d(t-c)(t-\partial)\,\omega'(t)}{dt}$$

— целая функция степени $n-1$. Поэтому

$$\int_c^\partial \frac{d(t-c)(t-\partial)\varphi_n'(t)}{dt}\,\omega(t)\,dt = 0$$

для всякой функции $\omega(t)$ степени $n-1$. А это приводит нас к заключению, что $\frac{d(t-c)(t-\partial)\varphi_n'(t)}{dt}$ отличается от $\varphi_n(t)$ только постоянным множителем. Итак,

$$\frac{d(t-c)(t-\partial)\,\varphi_n'(t)}{dt} = K\varphi_n(t), \tag{18}$$

причём нетрудно убедиться, сравнивая коэффициенты старших членов обеих частей последнего равенства, что

$$K = n(n+1).$$

Уравнение (18) и есть то дифференциальное уравнение 2-го порядка, которому удовлетворяет функция $\varphi_n(t)$.

Ту же функцию $\varphi_n(t)$ можно ещё представить в другом виде, весьма удобном для целей приближённого

24*

вычисления определённых интегралов, а именно, в виде

$$\varphi_n(t) = L\frac{d^n (t-c)^n (t-\partial)^n}{dt^n}, \tag{19}$$

где L подбирается так, чтобы коэффициент старшего члена функции $\varphi_n(t)$ был равен единице:

$$L = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}.$$

Для того чтобы оправдать равенство (19), необходимо доказать, что определённая формулой (19) функция $\varphi_n(t)$ удовлетворяет основному условию (*). Обозначим для сокращения:

$$\Phi(t) = (t-c)^n (t-\partial)^n; \quad \Phi_1(t) = \Phi'(t);$$
$$\Phi_2(t) = \Phi_1'(t); \ \ldots; \quad \Phi_n(t) = \Phi_{n-1}'(t).$$

Функция $\Phi_n(t)$ вовсе не будет содержать множителей $t-c$ и $t-\partial$, но $\Phi_{n-1}(t)$ содержит их в первой степени. Поэтому заключаем, что

$$\Phi(c) = \Phi_1(c) = \ldots = \Phi_{n-1}(c) = 0,$$
$$\Phi(\partial) = \Phi_1(\partial) = \ldots = \Phi_{n-1}(\partial) = 0.$$

Теперь возьмём интеграл

$$\int_c^\partial \Phi_{m+1}(t)\,\omega(t)\,dt = \int_c^\partial \Phi_m'(t)\,\omega(t)\,dt$$

и применим к нему интегрирование по частям; тогда

$$\int_c^\partial \Phi_{m+1}(t)\,\omega(t)dt =$$

$$= \Big[\Phi_m(t)\omega(t)\Big]_c^\partial = -\int_c^\partial \Phi_m(t)\,\omega'(t)\,dt = -\int_c^\partial \Phi_m(t)\,\omega'(t)\,dt$$

(для m, не превышающего $n-1$).

Полагая в последней формуле последовательно $m=n-1, \ldots, 1, 0$, условившись, что $\Phi_0(t)=\Phi(t)$, находим

$$\int_c^\partial \Phi_n(t)\,\omega(t)\,dt=-\int_c^\partial \Phi_{n-1}(t)\,\omega'(t)\,dt=\ldots=$$
$$=\pm\int_c^\partial \Phi(t)\,\omega^{(n)}(t)\,dt,$$

так что

$$\int_c^\partial \Phi^{(n)}(t)\,\omega(t)\,dt=(-1)^n\int_c^\partial \Phi(t)\,\omega^{(n)}(t)\,dt,$$

и если $\omega(t)$ степени $n-1$, то интеграл правой части равен нулю, а поэтому $\Phi^{(n)}(t)$ удовлетворяет основному условию, т. е. отличается от $\varphi_n(t)$ лишь постоянным множителем, что и требовалось показать.

Итак, в способе Гаусса

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\,2n}\;\frac{d^n(t-c)^n(t-\partial)^n}{dt^n}.$$

Для вычисления определённого интеграла надо знать корни этой функции. Но было бы очень неудобно для каждого данного случая, в зависимости от пределов интегрирования c и ∂, вычислять отдельно корни уравнения $\varphi_n(t)=0$. Для избежания этого произведём подстановку, введя новую переменную z равенством

$$t=c+(\partial-c)\,z.$$

Тогда значениям $t=c$ и $t=\partial$ будут соответствовать значения $z=0$ и $z=1$. Функция $\varphi_n(t)$ преобразуется в новую:

$$\varphi_n(t)=L\,\frac{d^n(\partial-c)^{2n}z^n(z-1)^n}{(\partial-c)^n\,dz^n}=$$
$$=L(\partial-c)^n\,\frac{d^n[z^n(z-1)^n]}{dz^n}.$$

Остаётся рассмотреть уравнение $\frac{d^n[z^n(z-1)^n]}{dz^n}=0$. Найдя корни z_k этого уравнения, мы будем знать и корни уравнения $\varphi_n(t)=0$; они будут $t_k=c+(\partial-c)z_k$. Существуют таблицы корней уравнения

$$\frac{d^n[z^n(z-1)^n]}{dz^n}=0$$

для различных значений n. По ним мы всегда вычислим корни функций φ_n для любых значений c и ∂.

ПРИМЕЧАНИЯ
И
ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИМЕЧАНИЯ

К статье 1 «Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева»

Рассматриваемая работа была напечатана в 1884 г. в Сообщениях Харьковского математического общества за 1883 г. (стр. 105—114). В том же 1884 г. эта работа была напечатана на французском языке под заглавием «Demonstration de certaines inégalités de M. Tchebycheff» в журнале Mathematische Annalen (т. 24, стр. 172—180). Почти одновременно с А. А. Марковым рассматриваемые неравенства доказал Стильтьес, который ни о статье Чебышева, ни о работе Маркова не упоминает.

В ответ на сделанное Марковым заявление о своём приоритете Стильтьес опубликовал небольшую заметку «Note à l'occasion de la réclamation de M. Markoff» (Ann. Sci. Ec. norm., Paris, sér. 3, т. 2, 1885, стр. 183—184).

В этой заметке Стильтьес объясняет, что о работе Маркова он знать не мог, а статья Чебышева, действительно, ускользнула от его внимания.

Вскоре после опубликования своего доказательства неравенств Чебышева Марков нашёл решение общей проблемы, и эти исследования Маркова вошли в качестве третьей главы в его диссертацию «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей» (СПБ, 1884).

В 1886 г. появилась диссертация К. А. Поссе «Sur quelques applications des fractions continues algébriques», в которой результаты Маркова были прекрасно изложены и несколько дополнены. На эту диссертацию постоянно ссылается в своих дальнейших работах и сам Марков.

Своё упрощённое изложение результатов Маркова Поссе опубликовал ещё в статье «К вопросу о предельных значениях интегралов или сумм» (Сообщения Харьковского математического общества за 1885 г., стр. 35—58).

Как прекрасное дополнение и, если угодно, комментарий к нескольким работам Маркова, эта статья Поссе включена в настоящий сборник в качестве приложения (см. стр. 391).

К статье 2 «Выдержка из одного письма Эрмиту»

Статья представляет перевод заметки А. Маркова «Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite», напечатанной в 1886 г. в журнале Annales de l'École Normale (sér. 3, т. III, стр. 81—88).

К статьям 3 и 4 «О корнях некоторых уравнений»

Обе статьи представляют перевод работ А. А. Маркова, напечатанных на французском языке под заглавием «Sur les racines de certaines équations» в XXVII томе журнала Mathematische Annalen (1886 г.), стр. 143—150, 177—182.

Первая из этих двух статей была напечатана также на русском языке под заглавием «О распределении корней некоторых уравнений» в Сообщениях Харьковского математического общества за 1885 г., стр. 89—98.

Остановимся здесь на содержании второй статьи, которая подверглась некоторой критике в книге Г. Сеге (G. Szegö) Orthogonal Polynomials (New York, 1939). На стр. 111—112 Сеге более точно формулирует первую теорему А. Маркова и даёт её доказательство, которое в существенном не отличается от первоначального доказательства А. Маркова, но несколько компактнее его.

Точная формулировка такова: *Пусть при* $a<y<b$, $\xi_1<\xi<\xi_2$ *функция* $V(y,\xi)$ *положительна, непрерывна и имеет непрерывную производную* $\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}$; *пусть, кроме того, интегралы*

$$\int_a^b y^k \frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}\, dy \quad (k=0,1,2,\ldots,2n-1)$$

сходятся равномерно в каждом замкнутом подинтервале $[\xi',\xi'']$ *открытого интервала* (ξ_1,ξ_2). *В таком случае, если*

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

есть возрастающая функция от y $(a<y<b)$, *то* k*-й корень* $x_k=x_k(\xi)$ (*при фиксированном* k) *ортогонального полинома* $\varphi_n(y)=\varphi_n(y,\xi)$ *есть возрастающая функция от* ξ.

Мы имеем тождество относительно ξ

$$\int_a^b \frac{\varphi_n^2(y,\xi)}{y-x_k} V(y,\xi)\,dy = 0 \qquad (\xi_1<\xi<\xi_2).$$

Мы можем его продифференцировать по ξ. Это дифференцирование даёт:

$$-\frac{dx_k}{d\xi}\int_a^b \left[\frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_k}\right]^2 V(y,\xi)\,dy + {}$$

$$+\int_a^b \frac{\varphi_n^2(y,\xi)}{y-x_k}\,\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}\,dy = 0. \qquad (1)$$

Остаётся доказать, что при условиях теоремы

$$\int_a^b \frac{\varphi_n^2(y,\xi)}{y-x_k}\,\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}\,dy > 0.$$

Для доказательства введём возрастающую функцию от y

$$\sigma(y) = \sigma(y,\xi) = \frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial\xi}.$$

В силу свойства ортогональности

$$\int_a^b \frac{\varphi_n^2(y,\xi)}{y-x_k} V(y,\xi)\,dy = 0.$$

Поэтому

$$\int_a^b \frac{\varphi_n^2(y,\xi)}{y-x_k}\,\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}\,dy =$$

$$= \int_a^b \varphi_n^2(y,\xi)\,V(y,\xi)\,\frac{\sigma(y,\xi)-\sigma(x_k,\xi)}{y-x_k}\,dy,$$

правая же часть положительна, так как разность

$$\sigma(y,\xi)-\sigma(x_k,\xi)$$

имеет тот же знак, что и

$$y-x_k.$$

Из теоремы А. Маркова немедленно получаются неравенства для корней полиномов Якоби и, в частности, для корней полиномов Лежандра. Эти последние А. Марков и рассматривает как пример на применение теоремы. Для этого он полагает

$$V(y, \xi) = \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{\frac{1}{2}\xi} \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant +1)$$

и получает неравенства Брунса (1881)

$$\cos\frac{(2n-2k+2)\pi}{2n+1} < x_k < \cos\frac{(2n-2k+1)\pi}{2n+1}.$$

В конце статьи А. Марков даёт для корней полиномов Лежандра более узкие интервалы.

Вывод основан на второй теореме А. Маркова, которая, как показал Сеге (стр. 117—118), не корректна. Действительно, в этой теореме рассматривается функция

$$f(y) = \frac{(y-e)\,V(y, \xi)}{\dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}} \qquad (a < y < b),$$

где e — некоторое число из интервала (a, b). А. Марков требует, чтобы

$$\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} > 0, \tag{2}$$

$$f'(y) < 0. \tag{3}$$

Но при $y > e$ в силу (2) будет $f(y) > 0$, а при $y < e$ будет $f(y) < 0$, откуда видно, что условие $f'(y) < 0$ возможно лишь при обращении знаменателя $\dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}$ в нуль в точке $y = e$, что противоречит (2). Если бы мы заменили (2) на

$$\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} \geqslant 0,$$

то и это не спасло бы положения, так как в точке $y = e$ функция $f(y)$ обращалась бы в бесконечность, и поэтому выполнение неравенства (3) при $y \neq e$ не позволило бы сделать какие-либо заключения относительно знака отношения

$$\frac{f(y) - f(x_k)}{y - x_k}.$$

Поэтому Сеге замечает, что более точные неравенства для корней полиномов Лежандра, указанные в конце статьи А. Маркова, надлежит считать впервые установленными в статье Стильтьеса «Sur les racines de l'équation $X_n = 0$» (Acta mathematica, т. 9, 1886, стр. 385—400).

Не оспаривая этих замечаний Сеге, мы хотим здесь показать, как из равенства А. Маркова (1) получается одна теорема, которая позволяет без труда установить уточнённые неравенства для корней полиномов Лежандра (и вообще полиномов Якоби при $\alpha = \beta$).

Примем, что $a = -1$, $b = 1$ и что $V(-y, \xi) = V(y, \xi)$. Тогда отношение

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \xi} = \sigma$$

есть также чётная функция от y. Мы примем, что это отношение есть возрастающая функция от y^2, и докажем, что в таком случае положительные корни x_k возрастают при возрастании ξ, а отрицательные убывают.

Из формулы (1) следует:

$$-\frac{dx_k}{d\xi}\int_{-1}^{+1}\left[\frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_k}\right]^2 V(y, \xi)\,dy +$$

$$+\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{y^2 - x_k^2}(y + x_k)\,\sigma(y, \xi)\,V(y, \xi)\,dy = 0.$$

Но

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{y^2 - x_k^2}\,y\,\sigma(y, \xi)\,V(y, \xi)\,dy = 0.$$

Значит,

$$\frac{dx_k}{d\xi}\int_{-1}^{+1}\left[\frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_k}\right]^2 V(y, \xi)\,dy =$$

$$= x_k\int_{-1}^{+1}\varphi_n^2(y, \xi)\,V(y, \xi)\,\frac{\sigma(y, \xi) - \sigma(x_k, \xi)}{y^2 - x_k^2}\,dy,$$

откуда и вытекает, что знак $\frac{dx_k}{d\xi}$ совпадает со знаком x_k.

Если теперь положить

$$V(y, \xi) = (1 - y^2)^{-\xi},$$

так что

$$\sigma(y, \xi) = \ln \frac{1}{1-y^2},$$

то и получится, что отрицательные корни

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

полинома Лежандра удовлетворяют неравенствам

$$-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} < x_k < -\cos\frac{k\pi}{n+1} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

указанным в статье А. Маркова.

К статье 5 «Об одном вопросе Д. И. Менделеева»

Статья была напечатана в Известиях Петербургской Академии наук за 1889 г. (т. 62, стр. 1—24).

Теорема А. А. Маркова обобщена его братом В. А. Марковым, который в своей работе «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля» (Петербург, 1892) доказал следующее предложение: *Если $P(x)$ — вещественный многочлен степени n, то*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} \left| \frac{d^k}{dx^k} P(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{(k+1)\ldots 2k} \max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} |P(x)|,$$

причём знак $=$ имеет место в том и только в том случае, когда

$$P(x) = AT_n(x) = A\cos n \arccos x.$$

Простое доказательство теоремы В. А. Маркова принадлежит С. Н. Бернштейну *).

В другом направлении теорему А. А. Маркова обобщал И. Шур **). Вот два из результатов Шура:

*) С. Н. Бернштейн, О теореме В. А. Маркова (Труды Ленинградского индустриального института, 1938, стр. 8—12).

**) I. Schur, Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervalle (Math. Zeitschr., Bd. 4, 1919, стр. 271—287).

1°. *Если $P(x)$ — полином степени n и*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = M,$$

то

$$|P'(\pm 1)| \leqslant Mn^2,$$

причём знак = исключается, если $P(x) \not\equiv AT_n(x)$. Далее, если $|P'(x)|$ имеет относительный максимум во внутренней точке ξ интервала $(-1, 1)$, то при $n \geqslant 3$

$$|P'(\xi)| < \frac{1}{2} Mn^2.$$

2°. *Если $P(x)$ — полином степени n, обращающийся в нуль на одном из концов интервала $[-1, 1]$, то*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P'(x)| \leqslant n^2 \cos^2 \frac{\pi}{4n} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|.$$

К неравенству А. А. Маркова примыкают неравенства С. Н. Бернштейна, основное из которых относится к 1912 г. и гласит: *Если $S(\theta)$ есть тригонометрическая сумма порядка n, т. е.*

$$S(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

то

$$\max |S'(\theta)| \leqslant n \max |S(\theta)|,$$

причём знак = имеет место только в том случае, когда

$$S(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

Различные дальнейшие неравенства, относящиеся к полиномам, тригонометрическим суммам и некоторым другим классам целых трансцендентных функций, читатель найдёт в монографии С. Н. Бернштейна «Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной» (часть первая, М — Л., 1937).

К статье 6 «О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби»

Впервые статья была напечатана в Записках Петербургской Академии наук за 1894 г. (том LXXIV, № 2).

В 1940 г. появился английский перевод этой статьи, сделанный Я. Шохатом (J. Shohat) (См. Duke, Mathematical Journal, Vol. 7).

Работа П. Л. Чебышева, о которой упоминает А. А. Марков в конце своей статьи, относится к 1892 г. и находится во втором томе Собрания сочинений Чебышева.

Из позднейших работ, имеющих некоторое отношение к статье А. А. Маркова, отметим заметку М. Г. Крейна «О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний валов» (Математический сборник, 1933, т. 40, № 4).

К статье 7 «Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей»

Статья была напечатана на французском языке под заглавием «Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues» в 19-м томе журнала Acta mathematica (1895 г., стр. 93—104). На русском языке А. Марков опубликовал небольшую заметку «Доказательство сходимости многих непрерывных дробей» в Сообщениях Харьковского математического общества за 1885 г. (стр. 29—33), а также статью «Доказательство сходимости многих непрерывных дробей» в Записках Петербургской Академии наук за 1893 г.

Вместо интеграла, который фигурирует у А. Маркова, можно взять интеграл Стильтьеса

$$\int_a^b \frac{d\sigma(u)}{z-u}, \tag{1}$$

где $\sigma(u)$ есть неубывающая функция ограниченной вариации. Если интервал интегрирования бесконечен, то делается предположение, что интеграл

$$\int_a^b u^{2k} d\sigma(u)$$

существует при любом натуральном k. Интегралу (1) можно сопоставить бесконечный ряд

$$\frac{S_0}{z}+\frac{S_1}{z^2}+\frac{S_2}{z^3}+\ldots+\frac{S_{n-1}}{z^n}+\ldots, \tag{2}$$

где $S_k\,(k=0,1,2,\ldots)$ суть так называемые моменты

$$S_k=\int_a^b u^k d\sigma(u) \quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

С другой стороны, интегралу (1) можно сопоставить непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cfrac{1}{\alpha_3 z+\beta_3-\ddots}}}, \tag{4}$$

где все α_i — положительны, которую часто называют А-дробью (associated fraction).

Если же $a \geqslant 0$, то *интегралу (1) принадлежит ещё и другая* непрерывная дробь

$$\cfrac{\;}{l_0 z-\cfrac{\;}{l_1-\cfrac{1}{l_2 z-\cfrac{1}{l_3-\ddots}}}}, \tag{5}$$

где все l_i — положительны; эту дробь называют С-дробью (corresponding fraction). Рассмотрением С-дробей наука обязана Стильтьесу *).

Если интервал $[a, b]$ конечен, ряд (2) сходится и представляет функцию (1) вне некоторого круга плоскости комплексного переменного z. Как показал А. Марков, А-дробь (4) в отличие от ряда (2) сходится и равна интегралу (1) для всех z, кроме тех, *которые принадлежат интервалу $[a, b]$ вещественной оси*. Если $\rho = \max\{|a|, |b|\}$, то

$$|S_k| \leqslant M\rho^k \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Этими неравенствами ограничивается в случае А. Маркова рост $|S_k|$ при $k \to \infty$.

Если интервал (a, b) бесконечен **), то ряд (2) нигде не сходится, а непрерывная дробь, принадлежащая интегралу (1), может сходиться и равняться этому интегралу. А. Марков указал некоторые частные случаи, когда это имеет место.

Естественно, возникает вопрос о том, какие ограничения на рост величины $|S_k|$ в случае бесконечного интервала (a, b) обеспечивают сходимость непрерывных дробей и равенство их интегралу.

---

*) Stieltjes, Recherches sur les fractions continues (Annal. de Toulouse, т. VIII—IX, 1894—1895; имеется русский перевод).

**) Здесь, очевидно, предполагается, что функция $\sigma(u)$ не равна константе при $u < a'$ и $u > b'$, где $[a', b']$ есть некоторый конечный подинтервал интервала (a, b).

Если $a=0$, $b=\infty$, то этот вопрос эквивалентен вопросу о том, при каких ограничениях на рост величины S_k разрешимая проблема моментов Стильтьеса

$$S_k=\int_0^\infty u^k d\sigma(u) \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

имеет только одно (неубывающее) решение $\sigma(u)$ (две функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ не считают различными, если их разность есть константа во всех точках непрерывности).

Следующее предложение представляет некоторую сводку различных критериев, которые были даны рядом авторов.

Теорема 1. *Пусть $a=0$, $b=\infty$. Каждая из непрерывных дробей* (4), (5) *сходится и равна интегралу* (1) *всюду в комплексной плоскости, кроме полуоси* $0\leqslant z<\infty$, *если*

$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{S_k}<\infty$	А. Марков
$\underline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{1}{k!}S_k}<\infty$	Перрон *)
$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{1}{(2k)!}S_k}<\infty$	Гамбургер **)
$\underline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{1}{(2k)!}S_k}<\infty$	Рисс ***)
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2k]{S_k}}=\infty$	Карлеман ****)

*) Perron, Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche (Math. Ann., Bd. 74, 1913).

**) Hamburger, Beiträge zur Konvergenz-Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche (Math. Zeitschr., Bd. 4, 1919).

***) Riesz, Sur le problème des moments I, II, III (Arkiv för mat., astr. oih fysik, Vol. 16, 17, 1921, 1922).

****) Carleman, Sur le problème des moments (Comptes Rendus, Vol. 174, 1922).

Для случая, когда интервалом (a, b) является вся числовая ось, имеет место следующая

Теорема 2. *Разрешимая проблема моментов*

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k \, d\sigma(u) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

имеет только одно (неубывающее) решение $\sigma(u)$, *если*

$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1}{(2k)!} S_{2k}} < \infty$	Рисс
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{S_{2k}}} = \infty$	Карлеман

К статье 8 «Новые приложения непрерывных дробей»

Рассматриваемая статья была напечатана на французском языке под заглавием «Nouvelles applications des fractions continues» в журнале Mathematische Annalen за 1896 г. (т. 47, стр. 579—597). В том же году в несколько более полной редакции эта работа под тем же заглавием «Новые приложения непрерывных дробей» была напечатана в Записках Петербургской Академии наук (VIII серия, III том).

Основным предметом статьи является следующий вопрос: *Пусть числа* S_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *суть моменты в конечном интервале* (a, b) *некоторой функции* $f(x)$ *удовлетворяющей неравенствам*)*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant L, \tag{1}$$

т. е.

$$S_k = \int_a^b x^k f(x) \, dx \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{2}$$

*) Заметим, что А. А. Марков вместо (1) пишет неравенство

$$0 < f(x) < L,$$

хотя знак = у него может достигаться.

и пусть эти числа S_k не определяют функцию $f(x)$ в существенном однозначно; пусть далее $g(x)$ есть заданная в интервале (a, b) вещественная функция; предполагая, что $f(x)$ пробегает совокупность всех функций, удовлетворяющих условиям (1), (2), *требуется найти минимум и максимум функционала*

$$I[f(x)] = \int_a^b f(x) g(x)\, dx,$$

а также определить обе экстремальные функции $f_{\min}(x)$, $f_{\max}(x)$.

А. А. Марков решил этот вопрос, если $g(x)$ обладает производной порядка $n+1$, не меняющей своего знака в интервале (a, b).

Требование конечности интервала (a, b) не является существенным, и многие задачи теории имеют смысл и решаются также в случаях, когда интервал полубесконечен или совпадает со всей числовой осью.

Рассматриваемая статья выдвигает ряд вопросов, которые объединяются в своеобразную проблему моментов. Изучению этой проблемы моментов посвящено несколько работ М. Г. Крейна и автора этих строк. Сводка результатов этих работ дана в монографии: Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов (Харьков, 1938).

К статье 9 «О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием»

Мемуар П. Л. Чебышева «Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями» на русском языке появился впервые в первом томе Собрания сочинений Чебышева (СПБ, 1899).

Статья А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва «Sur un certain minimum» находится также в первом выпуске Собрания сочинений Золотарёва (Л., 1932).

Дальнейшее развитие идей А. А. Маркова и обобщение относящихся сюда его результатов принадлежат М. Г. Крейну, а также П. Г. Рехтман. См. М. Г. Крейн, Об одном обобщении исследований академика А. А. Маркова (Труды 2-го Всесоюзного съезда математиков, т. II, 1934); П. Г. Рехтман, Узагальнені канонічні представлення моментів і нерівності Чебишова (Записки Науково-дослідного інституту математики й механіки, Харків, т. XV, вип. 1, 1938). В этих работах основную роль играет метод выпуклых тел, значение которого для проблемы моментов впервые раскрыл Каратеодори в статье «Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen» (Rend. Palermo, Vol. XXXII, 1911).

Существенным свойством рассматриваемой А. А. Марковым системы функций

$$\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}(x)\quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

является то, что всякий не равный тождественно нулю «полином»

$$A_1\lambda_1(x) + A_2\lambda_2(x) + \ldots + A_{n+1}\lambda_{n+1}(x) \tag{1}$$

не может иметь в интервале (a, b) более n корней.

Дифференцируемость функций $\lambda_k(x)$, которую Марков предполагает, не обязательна, как это он сам отмечает в конце § 6.

Указанное свойство системы функций $\lambda_k(x)$ играет важную роль также в некоторых вопросах аппроксимации произвольных функций с помощью полиномов (1). Об этом см. С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, часть первая (М.—Л. 1937), а также Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации (М., 1947).

К статье 10 «О корнях уравнения $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$»

Первоначально статья была напечатана на французском языке под заглавием «Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$» в Известиях Академии Наук за 1898 г. (т. IX, № 5, стр. 435—416).

Функции

$$(-1)^m e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = P_m(x)$$

суть ортогональные полиномы Чебышева-Эрмита. Они удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ 2^n\sqrt{\pi}\,n!, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Другой путь для доказательства теоремы 4 указан А. А. Марковым в его книге «Исчисление вероятностей».

К статье 11 «Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля»

Статья представляет незначительную переработку литографированного курса «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля», составленного по лекциям акад. А. А. Маркова и изданного в 1906 г. в литографии Богданова (Петербург, Эртелев п., 7).

В настоящей редакции опущены некоторые числовые примеры и параграф, посвящённый одному механизму Чебышева. Кроме того, опущен список литературы, в котором указано семь статей Чебышева, статьи Золотарёва, А. А. Маркова и В. А. Маркова, а также ещё четыре статьи Poncelet, Horvat, Résal и Blichfeldt.

К статье 12 «Лекции о непрерывных дробях»

Настоящая статья представляет незначительную переработку курса «О непрерывных дробях», составленного по лекциям акад. А. А. Маркова Н. Михельсоном и изданного в 1906 г. в литографии Богданова (Петербург, Эртелев п., 7).

В настоящей редакции опущены некоторые примеры, связанные с длинными вычислениями, и список литературы, насчитывающий 21 название.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К. А. Поссе

К вопросу о предельных значениях интегралов или сумм*)

В мемуаре П. Л. Чебышева «Sur les valeurs limites des intégrales» (Journal de Liouville, 1874) намечен вопрос о разыскании предельных значений интегралов или сумм, состоящий в следующем:

Даны значения интегралов

$$\int_a^b f(y)\,dy, \quad \int_a^b y f(y)\,dy, \ \ldots, \ \int_a^b y^{\mu} f(y)\,dy,$$

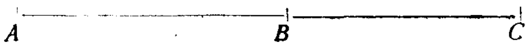
где $f(x)$ — неизвестная функция, остающаяся положительной в пределах интегрирования, a и b — данные числа, и требуется найти maximum и minimum интеграла $\int_a^x f(y)\,dy$, где x — данное число, лежащее между a и b.

Вопрос этот решён А. А. Марковым в сочинении его «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей» (С.-Петербург, 1884). Изучая это сочинение, я пришёл к тому заключению, что изложение полученных им результатов в 3-й главе сочинения может быть существенно упрощено и в некотором отношении дополнено. Я считаю не бесполезным указать в настоящей заметке эти упрощения и дополнения, причём стараюсь изложить предмет таким образом, чтобы содержание моей заметки было понятно читателю и незнакомому с содержанием 3-й главы сочинения А. А. Маркова.

---

*) См. примечание к статье 1 «Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева», стр. 377.

Не нарушая общности вопроса, положим нижний предел интегралов равным нулю, верхний конец обозначим через l; будем рассматривать элементы интеграла $\int\limits_0^l f(y)\,dy$ как массы точек на прямой AC, длина которой равна l, различные значения y в пределах интегрирования как расстояния этих точек от A, длину AB обозначим через x и поставим вопрос следующим образом:



На прямой $AC = l$ неизвестным образом распределена масса, величина которой $\alpha_0 = \int\limits_0^l f(y)\,dy$ дана; даны также суммы произведений масс различных точек на первые, вторые, ... μ-е степени соответственных расстояний от A, т. е. даны

$$\alpha_0 = \int\limits_0^l f(y)\,dy,\quad \alpha_1 = \int\limits_0^l y f(y)\,dy,$$

$$\alpha_2 = \int\limits_0^l y^2 f(y)\,dy,\quad \ldots,\quad \alpha_\mu = \int\limits_0^l y^\mu f(y)\,dy.$$

Требуется найти maximum и minimum массы отрезка AB данной длины x, т. е. интеграла $\int\limits_0^x f(y)\,dy$.

I случай. μ равно чётному числу $2n$.

Представим себе, что вся масса концентрирована в нескольких отдельных точках, в числе которых находится и данная точка B, и предложим себе определить расстояния этих точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и соответствующие им массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$ так, чтобы все данные сохранили свои значения, т. е. под условиями

$$\sum_1^k m_i = \alpha_0,\quad \sum_1^k m_i x_i = \alpha_1,\quad \ldots,\quad \sum_1^k m_i x_i^{2n} = \alpha_{2n}.$$

Легко видеть, что существуют только две концентрации, в которых число неизвестных равно числу условных уравнений.

1) Концентрация в точке B и ещё n других точках, в которой неизвестные будут m_x — масса точки B и n пар неизвестных x_i и m_i, определяющих расстояния и массы остальных то-

чек, а всего $2n+1$ неизвестных, удовлетворяющих системе $2n+1$ уравнений

$$x^k m_x + \sum_1^n m_i x_i^k = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n). \tag{1}$$

2) Концентрация в точках A, B, C и ещё $n-1$ других точках, в которой неизвестные будут m_0 — масса точки A, m_x — масса точки B, m_l — масса точки C и $n-1$ пар неизвестных x_i и m_i, определяющих расстояния и массы остальных точек, а всего $2n+1$ неизвестных, удовлетворяющих системе $2n+1$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} m_0 + m_x + m_l + \sum_1^{n-1} m_i &= a_0, \\ x^k m_x + l^k m_l + \sum_1^{n-1} x_i^k m_i &= a_k \ (k = 1, 2, \ldots, 2n). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

II случай. μ равно нечётному числу $2n-1$.

В этом случае единственные концентрации, в которых число неизвестных равно числу условных уравнений, будут:

1) Концентрация в точках A, B и $n-1$ других точках; неизвестные будут m_0, m_x — массы точек A, B и $n-1$ пар неизвестных x_i и m_i, соответствующих остальным точкам, а всего $2n$ неизвестных, удовлетворяющих системе $2n$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} m_0 + m_x + \sum_1^{n-1} m_i &= a_0, \\ x^k m_x + \sum_1^{n-1} x_i^k m_i &= a_k \ (k = 1, 2, \ldots, 2n-1). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2) Концентрация в точках B, C и $n-1$ других точках; неизвестные будут m_x, m_l — массы точек B, C и $n-1$ пар неизвестных x_i и m_i, а всего $2n$ неизвестных, удовлетворяющих системе $2n$ уравнений

$$l^k m_l + x^k m_x + \sum_1^{n-1} x_i^k m_i = a_k \ (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1). \tag{4}$$

Для того чтобы указанные концентрации были возможны, необходимо и достаточно, чтобы все величины x_i, удовлетворяющие соответствующим системам уравнений, были >0 и $<l$ и чтобы все числа m_0, m_x, m_l и m_i были >0.

Решение системы (1) и условия возможности первой концентрации в I случае

Составляем целую функцию $n+1$ степени

$$\varphi(z) = A_0 (z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

удовлетворяющую условию

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0, \qquad (\alpha)$$

где $\theta_{n-1}(y)$ означает произвольную целую функцию степени $n-1$.

Обозначая через $\Omega(y)$ какую угодно целую функцию степени не выше $2n$, будем иметь

$$\Omega(y) = \varphi(y)\,\omega(y) + \frac{\Omega(x)\,\varphi(y)}{(y-x)\,\varphi'(x)} + \sum_1^n \frac{\Omega(x_i)\,\varphi(y)}{(y-x_i)\,\varphi'(x_i)},$$

где $\omega(y)$ — целая функция степени не выше $n-1$; а отсюда, полагая

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

получаем, в силу условия (α), формулу

$$\int_0^l f(y)\,\Omega(y)\,dy = \Omega(x)\,\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} + \sum_1^n \Omega(x_i)\,\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Полагая в этой формуле последовательно $\Omega(y) = 1, y, y^2, \ldots, y^{2n}$, получим следующий ряд равенств:

$$\int_0^l f(y)\,y^k\,dy = x^k\,\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} + \sum_1^n x_i^k\,\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n),$$

из сравнения которых с системой уравнений (1) находим следующие выражения искомых масс:

$$m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}, \quad m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Величины же x_i определяются как корни уравнения

$$\frac{\varphi(z)}{z-x}=0,$$

где $\varphi(z)$ определяется условиями

$$\varphi(x)=0 \text{ и } \int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy=0.$$

Функция эта $\varphi(z)$ легко может быть составлена при помощи данных величин $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$.

Обозначая через $U_n^0(z)$ знаменатель n-й подходящей к

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y\,dy}{z-y},$$

а через $U_n^l(z)$ — знаменатель n-й подходящей к

$$\int_0^l \frac{f(y)(l-y)\,dy}{z-y},$$

очевидно, можем положить

$$\varphi(z)=A\,z\,U_n^0(z)+B\,(l-z)\,U_n^l(z), \tag{β}$$

где A и B — постоянные. В самом деле, выражение (β) даёт целую функцию $n+1$ степени, удовлетворяющую условию (α), потому что

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy=$$

$$=A\int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy+$$

$$+B\int_0^l f(y)\,(l-y)\,U_n^l(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy$$

обращается в нуль в силу известных свойств функции $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$.

Условие $\varphi(x)=0$ служит затем для определения отношения постоянных A и B и даёт:

$$AxU_n^0(x)+B(l-x)U_n^l(x)=0,$$

т. е.

$$\frac{A}{(l-x)U_n^l(x)}=\frac{B}{-xU_n^0(x)}. \tag{γ}$$

Функции же $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$ вполне определяются данными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ до постоянного множителя, как это видно из разложений

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y\,dy}{z-y}=\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\ldots-\frac{\alpha_n}{z^n}+\ldots,$$

$$\int_0^l \frac{f(y)(l-y)\,dy}{z-y}=\frac{l\alpha_0-\alpha_1}{z}+\frac{l\alpha_1-\alpha_2}{z^2}+\ldots+\frac{l\alpha_{2n-1}-\alpha_{2n}}{z^{2n}}+\ldots$$

Переходя к выводу условий возможности 1-й концентрации для I случая, т. е. к выводу условий, при которых будут соблюдены требования:

1) чтобы все числа x_i лежали между 0 и l и

2) чтобы все m_i и m_x были >0, замечаем, что первое требование сводится к тому, чтобы

$$\varphi(l) \text{ и } (-1)^{n+1}\varphi(0)$$

были одного знака, а второе выполняется безусловно.

В самом деле, замечая, что корни уравнений $U_n^0(z)=0$ и $U_n^l(z)=0$ все лежат между 0 и l и что, в силу выражения (β), корни уравнения $\varphi(z)=0$ будут перемежаться как с корнями уравнения $zU^0(z)=0$, так и с корнями уравнения $U_n^l(z)\,(l-z)=0$, мы видим, что только один из корней уравнения $\varphi(z)=0$ может лежать вне пределов 0 и l. Для того чтобы и этот корень попал в промежуток между 0 и l, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^{n+1}\varphi(0)$ и $\varphi(l)$ были одинакового знака. [К тому же заключению, впрочем, приводит и формула (α).]

По формуле (β) будем иметь:

$$(-1)^{n+1}\varphi(0)=(-1)^{n+1}BlU_n^l(0), \quad \varphi(l)=AlU_n^0(l).$$

Коэффициенты при z^n в $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$ можем всегда взять положительными, а тогда, очевидно, будем иметь

$$U_n^0(l)>0 \text{ и } (-1)^nU_n^l(0)>0,$$

и наше условие сводится к тому, чтобы A и $(-B)$ были одинаковых знаков или, на основании формулы (γ), чтобы $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ были одинаковых знаков.

Для того же, чтобы убедиться в безусловном выполнении 2-го требования, замечаем, что если u есть корень уравнения $\varphi(z)=0$, то

$$\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}=1+(y-u)\,\omega(y),$$

где $\omega(y)$ — целая функция $n-1$ степени, откуда

$$\left(\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}\right)^2=\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}+\frac{\varphi(y)\,\omega(y)}{\varphi'(u)},$$

а потому, в силу формулы (α), будем иметь

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)\,dy}{(y-u)\varphi'(u)}=$$

$$=\int_0^l f(y)\left(\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}\right)^2 dy>0,$$

откуда и следует, что $m_x=\dfrac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$ и $m_i=\dfrac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$ будут >0.

Итак, единственное условие возможности первой концентрации в I случае состоит в том, что числа $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ должны быть одинаковых знаков.

Решение системы (2) и условия возможности второй концентрации в I случае

Составляем целую функцию степени $n+2$

$$\varphi(z)=A_0\,z(z-l)(z-x)(z-x_1)\ldots(z-z_{n-1}),$$

удовлетворяющую условию

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy=0,$$

где $\theta_{n-2}(y)$ обозначает произвольную целую функцию $n-2$ степени.

Обозначая через $\Omega(y)$ какую угодно целую функцию степени не выше $2n$ и полагая

$$\psi(z) = \int_0^l f(y) \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z} dy,$$

получаем, подобно предыдущему, формулу

$$\int_0^l f(y) \Omega(y) \, dy = \Omega(0) \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} + \Omega(l) \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} + \\ + \Omega(x) \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} + \sum_1^{n-1} \Omega(x_i) \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Полагая в этой формуле последовательно $\Omega(y) = 1, y, y^2, \ldots, y^{2n}$, получаем ряд равенств, из сравнения которого с системой уравнений (2) получим следующие выражения искомых масс:

$$m_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}, \quad m_l = \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)}, \quad m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}, \quad m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Величины же x_i определятся как корни уравнения

$$\frac{\varphi(z)}{z(z-l)(z-x)} = 0,$$

где функция $\varphi(z)$ степени $n+2$ определяется условиями

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0$$

и

$$\int_0^l f(y) \varphi(y) \theta_{n-2}(y) \, dy = 0.$$

Функцию эту легко выразить при помощи данных.

Полагая $\varphi(z) = z(z-l)\Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — целая функция n-й степени, для определения $\Phi(z)$ будем иметь условия

$$\int_0^l f(y) y (l-y) \Phi(y) \theta_{n-2}(y) \, dy = 0 \qquad (a^*)$$

и

$$\Phi(x) = 0.$$

Условию (α^*), очевидно, удовлетворим, положив

$$\Phi(z) = A\,U_n^0(z) + B\,U_n^l(z), \tag{β^*}$$

где A и B — постоянные, а $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$ имеют вышеуказанные значения.

В самом деле,

$$\int_0^l f(y)\,y\,(l-y)\,\Phi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy =$$

$$= A\int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,(l-y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy +$$

$$+ B\int_0^l f(y)\,(l-y)\,U_n^l(y)\,y\,\theta_{n-2}(y)\,dy$$

обращается в нуль в силу известных свойств функций $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$.

Условие $\Phi(x) = 0$ даст затем

$$\frac{A}{U_n^l(x)} = \frac{B}{-U_n^0(x)}. \tag{γ^*}$$

Переходя к выводу условий возможности второй концентрации, т. е. условий, при которых выполняются требования:

1) чтобы все x_i были в пределах 0 и l и

2) чтобы $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}$, $\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)}$, $\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$, $\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$ были > 0,

замечаем, что первое требование, как видно из формулы (β^*), будет выполнено при условии, что $(-1)^n\,\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинакового знака, а второе — при выполнении условий

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} > 0, \quad \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0,$$

так как $\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$ и $\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$, при выполнении первого требования, будут безусловно положительными. В самом деле, обозначая через u любой корень уравнения $\Phi(z)=0$, будем иметь по формуле $\varphi(z)=z(z-l)\Phi(z)$

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}\,dy=$$

$$=\int_0^l f(y)\frac{y(l-y)}{u(l-u)}\frac{\Phi(y)}{(y-u)\Phi'(u)}\,dy=$$

$$=\int_0^l f(y)\frac{y(l-y)}{u(l-u)}\left(\frac{\Phi(y)}{(y-u)\Phi'(u)}\right)^2 dy$$

в силу условия (α^*). Отсюда и видим, что для $0<u<l$

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}>0.$$

Остаются, следовательно, условия a) $(-1)^n\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковых знаков, b) $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$ c) $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)}>0$.

Замечая, что

$$(-1)^n\Phi(0)=(-1)^n\,[A\,U_n^0(0)+B\,U_n^l(0)],$$
$$\Phi(l)=A\,U_n^0(l)+B\,U_n^l(l),$$

и припоминая, что всегда можем распорядиться так, чтобы

$$(-1)^n U_n^0(0),\ (-1)^n\,U_n^l(0),\quad U_n^0(l),\ U_n^l(l) \text{ были } >0,$$

видим, что условие a) выполнено, если A и B — одинаковых знаков, т. е. на основании (γ^*), когда $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ — противоположных знаков.

Далее

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(0)}\,dy=\int_0^l f(y)\frac{(l-y)\Phi(y)\,dy}{l\Phi(0)}=$$

$$=\int_0^l \frac{f(y)(l-y)\,[A\,U_n^0(y)+B\,U_n^l(y)]}{l\,[A\,U_n^0(0)+B\,U_n^l(0)]}\,dy=$$

$$=\frac{A}{A\,U_n^0(0)+B\,U_n^l(0)}\int_0^l f(y)\,U_n^0(y)\,dy$$

в силу того, что

$$\int_0^l f(y)(l-y)\,U_n^l(y)\,dy=0 \quad \text{и} \quad \int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,dy=0;$$

умножая и разделяя на $U_n^0(0)$, получаем:

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}=\frac{1}{1+\dfrac{B\,U_n^l(0)}{A\,U_n^0(0)}}\cdot\int_0^l f(y)\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy.$$

Замечая, что $\int\limits_0^l f(y)\dfrac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy>0$, потому что

$$\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}=1+y\omega(y),$$

где $\omega(y)$ — степени $n-1$, и

$$\int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,\omega(y)\,dy=0,$$

откуда

$$\int_0^l f(y)\left(\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\right)^2 dy=\int_0^l f(y)\frac{U_n^0(y)}{U_n'(0)}\,dy>0,$$

тотчас заключаем, что $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$ при A и B — одинаковых знаков, т. е. при том же условии, которое имели для а).

Совершенно тем же путём убеждаемся, что и $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)}>0$ при выполнении этого условия.

Итак, единственное условие возможности второй концентрации состоит в том, чтобы $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ были противоположных знаков. Условие это как раз противоположно условию возможности первой концентрации. Вышеизложенное заключает в себе, как видим, весьма простое доказательство теоремы, найденной А. А. Марковым и приведённой им на стр. 130 его сочинения.

Решение системы (3) и условия возможности первой концентрации во II случае

Составляем функцию $\varphi(z) = A_0 z(z-x)(z-x_0)\ldots(z-x_{n-1})$ целую $(n+1)$-й степени, удовлетворяющую условию

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy = 0, \tag{δ}$$

где $\theta_{n-2}(y)$ — произвольная целая функция $(n-2)$-й степени, и, полагая

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

совершенно так же, как сделано было выше, убеждаемся, что искомые массы будут

$$m_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}, \quad m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}, \quad m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

а величины x_i определяются как корни уравнения

$$\frac{\varphi(z)}{z(z-x)} = 0,$$

где $\varphi(z)$ определяется условиями (δ) и $\varphi(x) = 0$.

Чтобы выразить эту функцию $\varphi(z)$ при помощи данных величин $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}$, полагаем

$$\varphi(z) = z\,\Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — целая функция n-й степени, определяемая условиями

$$\int_0^l f(y)\,y\,\Phi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0 \text{ и } \Phi(x) = 0.$$

Первому из этих условий, очевидно, удовлетворим, полагая

$$\Phi(z) = A\varphi_n(z) + B(z-l)\,V_{n-1}(z), \tag{ε}$$

где A и B — постоянные, $\varphi_n(z)$ — знаменатель n-й, подходящей к

$$\int_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y},$$

а $V_{n-1}(z)$ — знаменатель $(n-1)$-й, подходящей к

$$\int\limits_0^l \frac{f(y)\,y\,(l-y)\,dy}{z-y}.$$

Условие $\Phi(x)=0$ даёт затем:

$$\frac{A}{(l-x)\,V_{n-1}(x)}=\frac{B}{\varphi_n(x)}. \tag{λ}$$

Функции $\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$ определяются данными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}$ до постоянного множителя, как это видно из разложений

$$\int\limits_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y}=\frac{\alpha_0}{z}+\frac{\alpha_1}{z^2}+\ldots+\frac{\alpha_{2n-1}}{z^{2n}}+\ldots,$$

$$\int\limits_0^l \frac{f(y)\,y\,(l-y)\,dy}{z-y}=\frac{l\alpha_1-\alpha_2}{z}+\frac{l\alpha_2-\alpha_3}{z^2}+\ldots+$$

$$+\frac{l\alpha_{2n-2}-\alpha_{2n-1}}{z^{2n-2}}+\ldots$$

Условия возможности этой концентрации приводятся к двум:
a) $(-1)^n\,\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковых знаков, b) $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$.

Замечая, что

$$(-1)^n\Phi(0)=(-1)^n A\varphi_n(0)+B\,(-1)^{n-1}\,V_{n-1}(0)\,l;\quad \Phi(l)=A\varphi_n(l),$$

находим, что условие a) выполняется, когда A и B — одинаковых знаков, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ — одинаковых знаков, так как всегда можем так распорядиться коэффициентами при высших степенях z в $\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$, чтобы $(-1)^n\varphi_n(0)$ и $(-1)^{n-1}V_{n-1}(0)$ были >0. Далее имеем:

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}=\int\limits_0^l f(y)\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(0)}\,dy=\int\limits_0^l f(y)\frac{\Phi(y)}{\Phi(0)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{A\varphi_n(0)-BlV_{n-1}(0)}\int\limits_0^l f(y)\Big[A\varphi_n(y)+B\,(y-l)\,V_{n-1}(y)\Big]dy=$$

$$=\frac{-BV_{n-1}(0)}{A\varphi_n(0)-BlV_{n-1}(0)}\int\limits_0^l f(y)\,(l-y)\,\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}\,dy.$$

Здесь $\int\limits_0^l f(y)(l-y)\dfrac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy>0$, потому что $\dfrac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}=$
$=1+y\omega(y)$, где $\omega(y)$ — степени $(n-2)$.

Отсюда

$$(l-y)\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}\right)^2=(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}+y(l-y)\frac{V_{n-1}(y)\,\omega(y)}{V_{n-1}(0)}$$

и, по известному свойству функции $V_{n-1}(y)$,

$$\int\limits_0^l f(y)(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy=\int\limits_0^l f(y)(l-y)\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}\right)^2dy>0.$$

Припоминая ещё, что $\varphi_n(0)$ и $V_{n-1}(0)$ — противоположных знаков, видим, что $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$, когда A и B — одинакозых знаков, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ — одинаковых знаков.

Решение системы (4) и условия возможности второй концентрации во II случае

Составляем функцию $\varphi(z)=A_0(z-l)(z-x)(z-x_1)\ldots$ $\ldots(z-x_{n-1})$ степени $n+1$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy=0, \qquad (8^*)$$

где $\theta_{n-2}(y)$ — произвольная целая функция $(n-2)$-й степени, и, полагая

$$\psi(z)=\int\limits_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}dy,$$

находим для искомых масс выражения

$$m_l=\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)},\quad m_x=\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},\quad m_i=\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

а величины x_i определятся как корни уравнения

$$\frac{\varphi(z)}{(z-x)(z-l)}=0.$$

Функция $\varphi(z)$, определяемая условиями $\varphi(x)=0$, $\varphi(l)=0$ и (δ^*), очевидно, может быть представлена в виде

$$\varphi(z) = (z-l)\,\Phi(z),$$

где

$$\Phi(z) = [A\,\varphi_n(z) + BzV_{n-1}(z)]; \qquad (\varepsilon^*)$$

$\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$ имеют вышеуказанные значения, а A и B — постоянные, для которых условие $\Phi(x)=0$ даёт:

$$\frac{A}{xV_{n-1}(x)} = \frac{B}{-\varphi_n(x)}. \qquad (\lambda^*)$$

Условия возможности второй концентрации будут:

a) $(-1)^n\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковых знаков, b) $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$,

$$(-1)^n\,\Phi(0) = (-1)^n A\,\varphi_n(0), \quad \Phi(l) = A\varphi_n(l) + BlV_{n-1}(l),$$

откуда видно, что условие a) выполняется, когда A и B — одинаковых знаков, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ — противоположных знаков.

При том же условии и $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$, потому что

$$\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} = \int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)}{(y-l)\varphi'(l)}\,dy = \int_0^l f(y)\,\frac{\Phi(y)}{\Phi(l)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{A\varphi_n(l) + B\,l\,V_{n-1}(l)}\int_0^l f(y)\,[A\,\varphi_n(y) + By\,V_{n-1}(y)]\,dy =$$

$$= \frac{BV_{n-1}(l)}{A\varphi_n(l) + B\,l\,V_{n-1}(l)}\int_0^l f(y)\,y\,\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\,dy,$$

где

$$\int_0^l f(y)\,y\,\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\,dy = \int_0^l f(y)\,y\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\right)^2 dy > 0;$$

следовательно, $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$ при A и B — одинаковых знаков.

Итак, условие возможности второй концентрации состоит в том, чтобы $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ были противоположных знаков, и это условие как раз противоположно условию возможности первой концентрации.

Таким образом, доказана и теорема, приведённая А. А. Марковым на стр. 102 его сочинения.

Что же касается того, что указанные выше концентрации дают maximum и minimum массы отрезка AB, смотря по тому, причислим ли мы точку B к AB или BC, то это следует прямо из неравенств П. Л. Чебышева, обобщённых А. А. Марковым во 2-й главе его сочинения, что им самим и указано.

Формулы (β) и (β^*), (ε) и (ε^*), дающие выражения функций, к составлению которых приводится решение систем (1), (2), (3) и (4) и при помощи которых, как мы видели, весьма просто получаются условия возможности рассматриваемых концентраций, дают также возможность весьма просто показать распределение корней этих функций.

Ограничимся рассмотрением случая I ($\mu = 2n$), так как случай II может быть разобран совершенно аналогичным указанному ниже путём.

Удерживая прежние обозначения, докажем прежде всего, что корни уравнений $U_n^0(z) = 0$ и $U_n^l(z) = 0$ перемежаются, т. е. что между каждыми двумя корнями одного из этих уравнений лежит один и только один корень другого.

Положим $F(z) = zU_n^0(z)$, $\Pi(z) = (z - l)\, U_n^l(z)$.

Обозначим корни функции $F(z)$ через $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, расположив их в возрастающем порядке величин, так что $z_0 = 0$ и $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n < l$.

Корни функции $\Pi(z)$ обозначим через $z', z'', \ldots, z^{(n)}, z^{(n+1)}$, и можем положить $0 < z' < z'' < \ldots < z^{(n)} < z^{(n+1)}$, $z^{(n+1)} = l$.

Функция $F(z)$, очевидно, удовлетворяет условию

$$\int_0^l f(y)\, F(y)\, \theta_{n-1}(y)\, dy = 0, \tag{5}$$

где $\theta_{n-1}(y)$ — произвольная целая функция $(n-1)$ степени.

Поэтому, обозначая через $\Omega(y)$ какую угодно целую функцию степени не выше $2n$, замечая, что $F(y)$ есть целая функция $n+1$ степени, и полагая

$$\Psi(z) = \int_0^l f(y)\, \frac{F(y - F(z)}{y - z}\, dy,$$

будем иметь:

$$\int_0^l f(y)\, \Omega(y)\, dy = \sum_{i=0}^{i=n} \Omega(z_i)\, \frac{\Psi(z_i)}{F'(z_i)}.$$

Полагая в этой формуле

$$\Omega(y) = \Pi(y)\,\theta_{n-1}(y),$$

где $\theta_{n-1}(y)$ — произвольная целая функция степени не выше $n-1$, и замечая, что

$$\int_0^l f(y)\,\Pi(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0,$$

получаем:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \Pi(z_i)\,\theta_{n-1}(z_i)\,\frac{\Psi(z_i)}{F'(z_i)} = 0. \tag{6}$$

Полагая в этой формуле

$$\theta_{n-1}(y) = \frac{F(y)}{(y-z_k)(y-z_{k+1})},$$

находим

$$\theta_{n-1}(z_k) = \frac{F'(z_k)}{z_k - z_{k+1}}, \quad \theta_{n-1}(z_{k+1}) = \frac{F'(z_{k+1})}{z_{k+1} - z_k}$$

и при i, не равном k или $k+1$, $\theta_{n-1}(z_i) = 0$, а потому формула (6) даёт:

$$\Pi(z_k)\,\Psi(z_k) = \Pi(z_{k+1})\,\Psi(z_{k+1}). \tag{7}$$

Замечая же, что $\frac{\Psi(z_k)}{F'(z_k)} > 0$, потому что, в силу формулы (5), можем написать (как уже несколько раз было показано)

$$\frac{\Psi(z_k)}{F'(z_k)} = \int_0^l f(y)\,\frac{F(y)}{(y-z_k)\,F'(z_k)}\,dy =$$

$$= \int_0^l f(y)\left(\frac{F(y)}{(y-z_k)\,F'(z_k)}\right)^2 dy,$$

заключаем из предыдущего, что числа $\Pi(z_k)\,F'(z_k)$ и $\Pi(z_{k+1})\,F'(z_{k+1})$ — одинаковых знаков, откуда и следует, что между двумя корнями функции $F(z)$ лежит один и только один корень функции $\Pi(z)$.

На основании доказанного можем, следовательно, написать следующие неравенства:

$$0 < z' < z_1 < z'' < z_2 < \ldots < z^{(n)} < z_n < l.$$

Припомним теперь, что, рассматривая первую концентрацию в точке B и ещё в n точках и решая систему уравнений (1), мы нашли, что расстояния искомых точек и данная величина x будут корнями уравнения

$$\varphi(z) = 0,$$

где

$$\varphi(z) = A z U_n^0(z) + B(l - z) U_n^l(z)$$

и

$$\frac{A}{(l - x) U_n^l(x)} = \frac{B}{-x U_n^0(x)}.$$

Формула (β), очевидно, показывает, что корни функции $\varphi(z)$ перемежаются как с корнями функции $F(z) = zU_n^0(z)$, так и с корнями функции $\Pi(z) = (z - l) U_n^l(z)$; кроме того, условие возможности первой концентрации, состоящее в том, что $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ должны быть одинаковых знаков, показывает, что данное число x должно лежать в одном из следующих промежутков: между 0 и z', z_1 и z'', ..., z_k и $z^{(k+1)}$, ... , z_n и l.

Поэтому, если обозначим через x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1} корни функции $\varphi(z)$, расположенные в возрастающем порядке величин, причём данная величина x будет совпадать с одним из этих корней, то, на основании вышесказанного, можем написать в рассматриваемом случае следующие неравенства:

$$0 < x_1 < z' < z_1 < x_2 < z'' < \ldots$$
$$\ldots < z_k < x_{k+1} < z^{(k+1)} < \ldots < z^{(n)} < z_n < x_{n+1} < l$$

Припомним далее, что, решая систему уравнений (2), соответствующую второй концентрации в A, B, C и ещё $n-1$ других точках, мы нашли, что расстояния этих точек от A будут корнями уравнения

$$\varphi(z) = z(z - l)\Phi(z) = 0,$$

где

$$\Phi(z) = A U_n^0(z) + B U_n^l(z) \qquad (\beta^*)$$

и

$$\frac{A}{U_n^l(x)} = \frac{B}{-U_n^0(x)},$$

и что условие возможности второй концентрации состоит в том, чтобы $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ были различных знаков. Следовательно, в этом случае данное число x должно лежать в одном из следующих промежутков между z' и z_1, z'' и z_2, ..., $z^{(k)}$ и z_k, ..., $z^{(n)}$ и z_n, а потому, обозначая через $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ корни функции $\Phi(z)$, причём один из них совпадает с данным числом x, можем написать следующие неравенства:

$$0 < z' < x' < z_1 < z'' < x'' < z_2 < \ldots$$
$$\ldots < z^{(k)} < x^{(k)} < z_k < \ldots < z^{(n)} < x^{(n)} < z_n < l.$$

Из всего вышеизложенного вытекает окончательно следующий результат.

Если данное число x совпадает с x_{k+1}, т. е. если $z_k < x < z^{(k+1)}$, то уравнение

$$\varphi(z) = \begin{vmatrix} z\,U_n^0(z) & (l-z)\,U_n^l(z) \\ x\,U_n^0(x) & (l-x)\,U_n^l(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(A)}$$

имеет k корней $x_1, x_2, \ldots, x_k$, меньших x, и предельные значения интеграла $\int\limits_0^x f(y)\,dy$ будут

$$M = \frac{\psi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\psi(x_2)}{\varphi'(x_2)} + \ldots + \frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)} + \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$$

и

$$M - \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},$$

где

$$\psi(z) = \int\limits_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy.$$

Если же x лежит между $z^{(k)}$ и z_k, то уравнение

$$\varphi(z) = z(z-l)\begin{vmatrix} U_n^0(z) & U_n^l(z) \\ U_n^0(x) & U_n^l(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(B)}$$

имеет k корней $0, x', x'', \ldots, x^{(k-1)}$, меньших x, и предельные значения интеграла $\int_0^x f(y)\,dy$ будут

$$M_1 = \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} + \frac{\psi(x')}{\varphi'(x')} + \ldots + \frac{\psi(x^{(k-1)})}{\varphi'(x^{(k-1)})} + \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$$

и

$$M_1 - \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},$$

где $\varphi(z)$ составляется по формуле (B), а

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}\,dy.$$

1 февраля 1885.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *И. Н. Бронштейн.*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

Переплёт и графическая орнаментация книги художника *А. П. Радищева.*

*

Подписано к печати 28/II 1948 г. Объём печ. л. 25,75 + 1 вклейка. Уч.-издат. л. 21,91. Тип. знак. в печ. л. 33 968. Цена книги 13 р. 25 к. Переплет 2 р. Тираж 5000. Зак № 1254. А 00450.

*

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
38	13 сн.	$\int\limits_c^b$	$\int\limits_a^b$	Тип.
63	11 св.	$(x-b)f_2'(x)$	$(x-b)f_2''(x)$	»
73	5 св.	$(x-a)f''(x)$	$(x-a)f_0''(x)$	»
198	6 сн. (в 1-й строке определителя)	$\lambda_2'(x)$	$\lambda_1'(x)$	»
241	3 сн.	$\int\limits_\alpha$	$\int\limits_\alpha^\beta$	»
333	5 св.	c^n	c_n	»
396	9 св.	$\int\limits_0$	$\int\limits_0^b$	»
396	«	$-\frac{a_n}{z^n}$	$+\frac{a_n}{z^n}$	»

Зак. 1254